A2 – Ausgleichsrechnung

Sowohl im Praktikum als auch im Unterricht werden Sie oft vor der Aufgabe stehen, aus Messwerten eine lineare oder proportionale Gesetzmäßigkeit abzulesen **und/oder** aus diesen Messwerten eine physikalische Größe zu ermitteln. Der Bereich der mathematischen Statistik, der sich mit dieser Fragestellung auseinandersetzt, ist die **lineare Regressionsanalyse**. Eine Methode der linearen Regression ist die **Anpassung einer Ausgleichsgeraden an Messwerte**, auch **Ausgleichsrechnung** genannt. Diese Anpassung der Ausgleichsgeraden kann sowohl rechnerisch als auch *per Hand* durchgeführt werden.

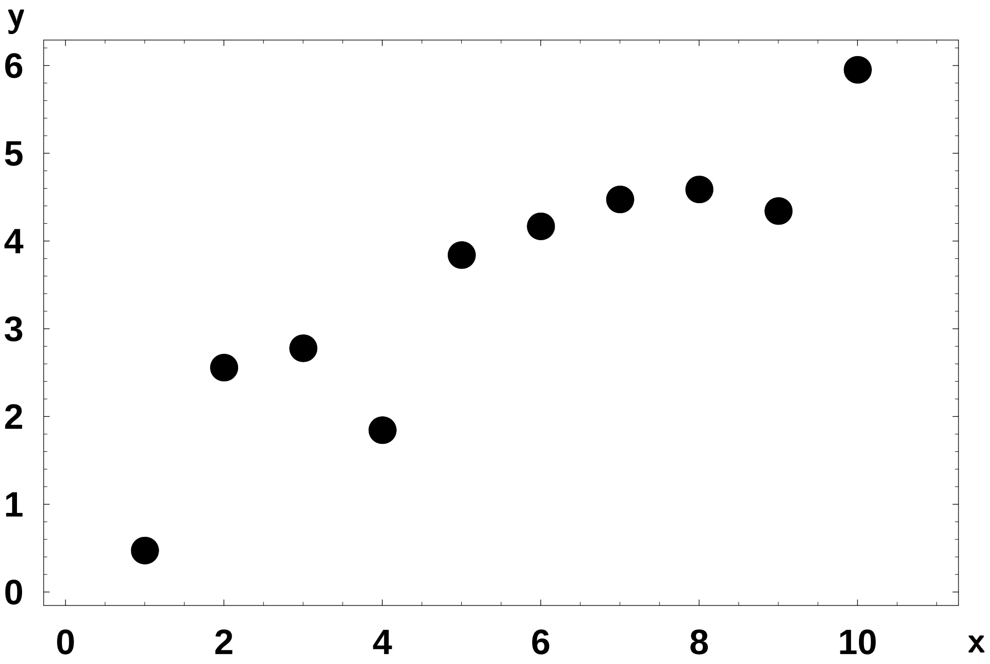
Das Thema Ausgleichsrechnung wird Sie im gesamten Praktikumsverlauf "verfolgen", ferner spielt es auch im Unterricht und in der Abschlussprüfung eine wichtige Rolle !

Beispiel: Ein Auto verbraucht zum Fahren Benzin des Volumens $V(s)$. Sie vermuten, dass die "Menge" $V(s)$ des verbrauchten Benzines proportional von der zurückgelegten Strecke s abhängt und wollen dies experimentell bestätigen. Dazu verwenden Sie die Methode der Ausgleichsrechnung.

Dieses Beispiel wird in Kapitel A2.2 weiter "ausgebaut"

A2.1 Mathematische Grundlagen

Im folgenden x-y-Diagramm sind 10 Einzelwerte $\{x_i, y_i\}$ als Punkte wiedergegeben ($i = 1, 2, \cdots 10$).

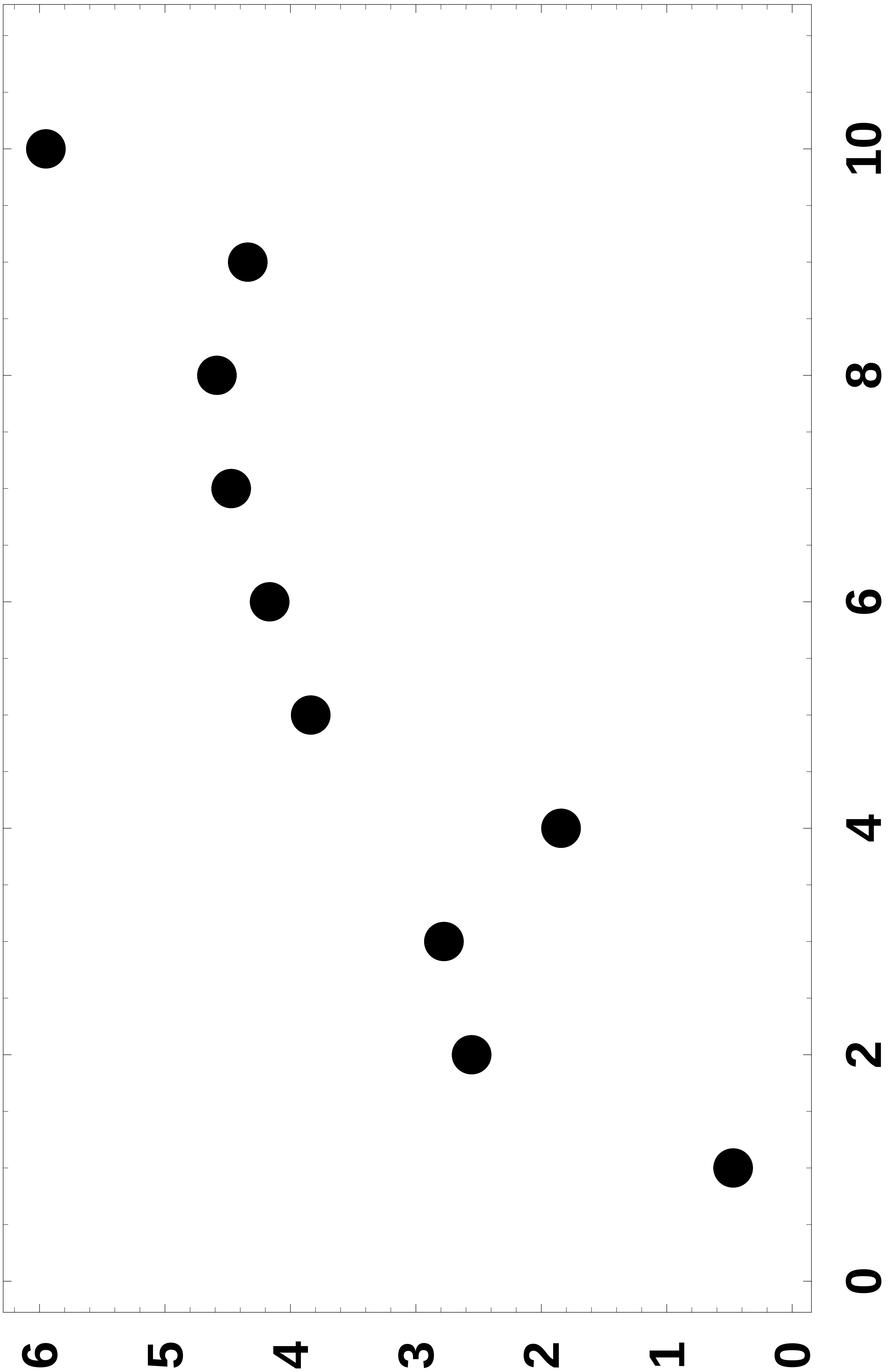


Diese Abbildung finden Sie auf der folgenden Seite großformatiger vor. Verwenden Sie jene Abbildung, um die folgenden Schritte graphisch nachzuvollziehen:

Schritt 1: Ziehen Sie *per Augenmaß* eine Gerade so durch die Punkteschar, dass diese möglichst *mittig* durch alle Punkte verläuft. Sie erhalten dann in etwa die auf Seite 3, oben, dargestellte Graphik. **Achtung! Der Durchgang der Ausgleichsgeraden durch den Ursprungspunkt des Koordinatensystems darf nicht erzwungen werden !** Einziges Kriterium für den Geradenverlauf ist die "Mittigkeit"→ .

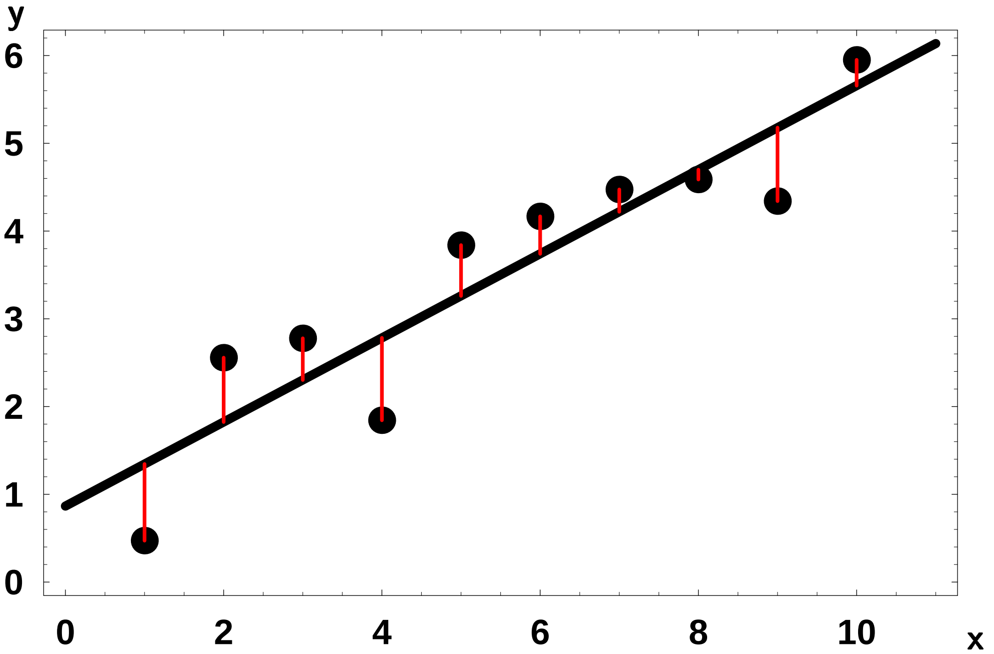
Sollte für die Ausgleichsgerade erwartet werden, dass sie durch den Koordinatenursprung verläuft, muss der graphisch ermittelte Wert a der Geradengleichung hinreichend nahe bei *0* liegen.

Folgende Seite (Seite 2): **Vorlage** zur Bearbeitung der obigen Aufgabe – **Fortsetzung** des Textes auf Seite 3


0
2
4
6
8
10
6
5
4
3
2
1
0

Die in der folgenden Abbildung dargestellte Gerade wurde → rechnerisch ermittelt und ist "optimal". Die von Ihnen ermittelte Gerade wird von dieser optimalen Gerade eventuell mehr der weniger abweichen – hierzu siehe auch Abschnitt A2.4.

Dieses rechnerische Verfahren wird **lineare** genannt **Regression–Analyse** genannt

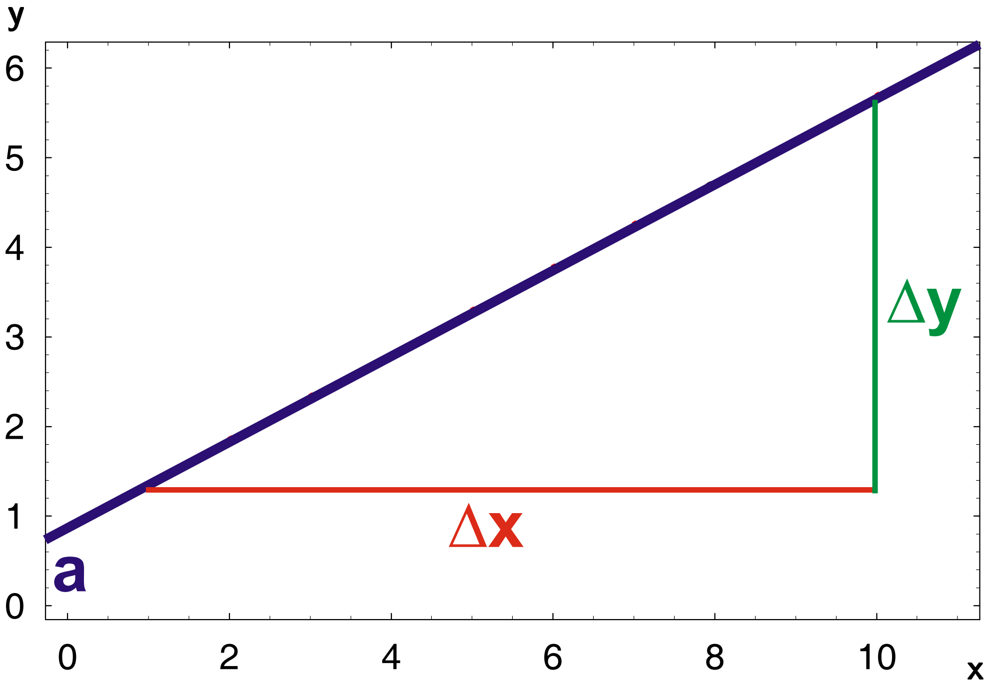


Schritt 2: Im weiteren Verlauf interessiert uns nur noch die angepasste Gerade. Die allgemeine Geradengleichung lautet im x-y-Diagramm:

$$y = a + b \cdot x \tag{1}$$

Sobald Sie die Ausgleichsgerade gezeichnet haben spielen die einzenen Messpunkte <u>keine</u> Rolle mehr !

Ziel der Ausgleichsrechnung ist, mit Hilfe der angepassten Geraden die Parameter a und b zu bestimmen:



Schritt 3: Der Parameter a ergibt sich aus dem Nulldurchgang der Geraden, da

$$y = a + b \cdot 0 = a$$

Der y-Achsenabschnitt a ist in der Regel im Praktikum **uninteressant**

In der Regel interessiert bei der Regressionsanalyse nur die Geradensteigung b

Schritt 4: Der Parameter b ergibt sich aus der Steigung der Geraden nach der Gleichung

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

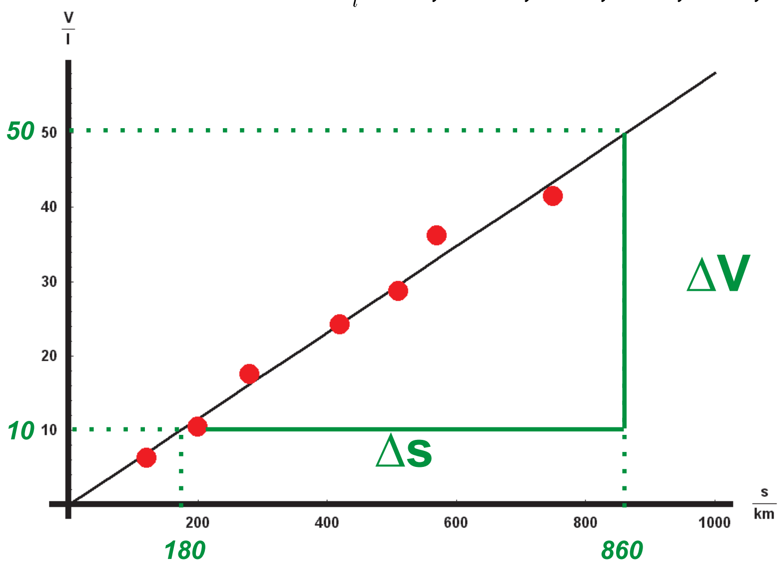
Die Konstruktion des Steigungsdreieckes mit Hilfe von Einzel-Messwerten ist ein grober Fehler und führt z.B. in schriftlichen Arbeiten dementsprechend zum Abzug von Bewertungseinheiten!

Dazu wird ein **Steigungsdreieck** an die Ausgleichsgerade angelegt (siehe Abbildung auf der vorhergehenden Seite, unten). Daraus ergeben sich durch Ablesen die Werte von Δx und Δy. **Wichtig:** Das Steigungsdreieck muss an die Ausgleichsgerade angelegt werden und darf **nicht** auf Einzelwerte aus der Messung zurückgreifen$\leftarrow$.

A2.2 Beispiel: Benzinverbrauch

Ein Auto verbraucht zum Fahren Benzin des Volumens $V(s)$. Sie vermuten, dass die "Menge" $V(s)$ des verbrauchten Benzines proportional von der zurückgelegten Strecke s abhängt und wollen dies experimentell bestätigen. Der gemessene Benzinverbrauch $V(s)$ in Abhängigkeit von s beträgt:

$\frac{s}{km}$	120	200	280	420	510	570	750	– zurückgelegte Strecke s
$\frac{V(s)}{l}$	6,20	10,4	17,5	24,2	28,7	36,2	41,5	– Benzinverbrauch $V(s)$



Die **Graphische Auswertung** (siehe Abbildung links) ergibt folgende Geradensteigung:

$$b = \frac{50\ l - 10\ l}{860\ km - 180\ km} = \frac{40\ l}{680\ km} \qquad \mapsto$$

$$b = 0,058823\ \frac{l}{km} = 0,059\ \frac{l}{km}$$

d.h. für dem Benzinverbrauch gilt die Gleichung

$$V(s) \approx 0,059\ \frac{l}{km} \cdot s$$

Die Einheit von b – dem durchschnittlichen Benzinverbrauch auf einen Kilometer – ergibt sich aus

$$[b] = \frac{[V]}{[s]} = \frac{l}{km}$$

A2.3 Transformation von Werten

Es kann vorkommen, dass der gesuchte Zusammenhang zwischen zwei Größen **nicht** proportional ist. Bei der experimentellen Ermittlung der Federkonstanten D (siehe Versuch Nr. M-1) wird beispielsweise die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von der Masse m gemessen. Es gilt:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \mapsto \quad T = k\,\sqrt{m}$$

wobei $k = \frac{2\,\pi}{\sqrt{D}} = const.$

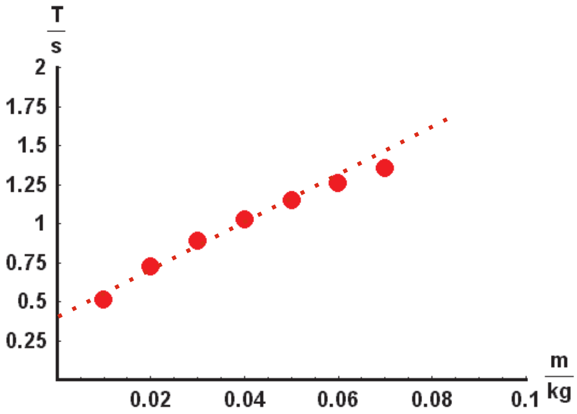
In diesem Fall müssen die Werte der **un**abhängigen Variablen (hier: der Masse m) so transformiert werden, dass sich eine Proportionalität ergibt (→). Im vorliegenden Beispiel wird von den Werten für die Masse m die Wurzel gezogen.

Was leider nicht immer möglich ist !

Beispiel: Es wird die Schwingungsdauer T (abhängige Variable) in Abhängigkeit von der Masse m (unabhängige Variable) gemessen. Man erhält folgende Messreihe:

$\frac{m}{g}$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	– Masse m
$\frac{T}{s}$	0,513	0,726	0,889	1,027	1,147	1,257	1,357	– Schwingungsdauer T

Bei Auftragung von T über m sieht man sofort, dass der Zusammenhang zwischen T und m nicht proportional oder linear ist (siehe Abbildung rechts).



Ersetzt man dagegen in der Gleichung $T = k \cdot \sqrt{m}$ $\sqrt{m}$ durch eine andere Variable, die wir x nennen, erhalten wir z.B. mit $x = \sqrt{m}$ die in x proportionale Gleichung $T = k\,x$.

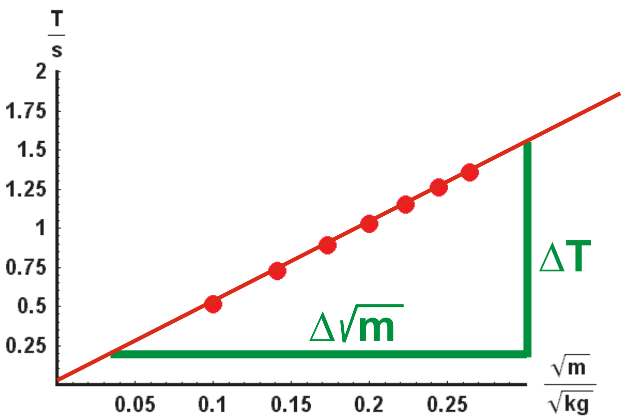
Im Ausgangs-Datensatz (siehe oben) müssen die Massen-Werte m also durch $\sqrt{m}$ ersetzt werden. **Wichtig:** Die abhängige Variable – in unserem Beispiel T – darf **nicht** umgerechnet werden. Man erhält nun durch diese **Transformation** folgenden "neuen" Datensatz:

$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g}}$	3,16	4,47	5,48	6,32	7,07	7,75	8,37	– Wurzel $\sqrt{m}$ der Masse
$\frac{T}{s}$	0,513	0,726	0,889	1,027	1,147	1,257	1,357	– Schwingungsdauer T

Dieser zweite – transformierte – Datensatz lässt sich nun mit Hilfe der Methode der Ausgleichsgeraden auswerten (siehe untere Abbildung rechts). Im vorliegenden Beispiel erhält man als Steigung den Wert

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta\sqrt{m}} = 5,1\,\frac{s}{\sqrt{kg}} = 5,1\,\sqrt{\frac{m}{N}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{D}}$$

und daraus schließlich – mit $D = \frac{4\,\pi^2}{k^2}$ – die Federkonstante $D = 1,5\,\frac{N}{m}$.



A2.4 Lösung zur Ausgleichsrechnung in Kapitel A2.1

Vergleichen Sie diese Lösung mit Ihrer Lösung auf Seite 2.