BE

1.0 Der Mars besitzt die Masse $m_M = 642 \cdot 10^{21}$ kg, hat den mittleren Radius $r_M = 3{,}39 \cdot 10^3$ km und dreht sich in $T_M = 24{,}6$ h einmal um seine eigene Achse. Möglicherweise werden noch in diesem Jahrhundert die ersten Menschen auf dem Mars landen und für längere Zeit dort leben.
Für die Kommunikation zwischen Menschen auf dem Mars und auf der Erde können dann unter anderem Satelliten dienen, welche sich auf kreisförmigen Bahnen mit dem Radius r_S um den Mars bewegen.

1.1 v_S ist der Betrag der Bahngeschwindigkeit eines solchen Satelliten, der antriebslos fliegt. Zeigen Sie mithilfe des Gravitationsgesetzes, dass gilt:

$$v_S = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r_S}},$$

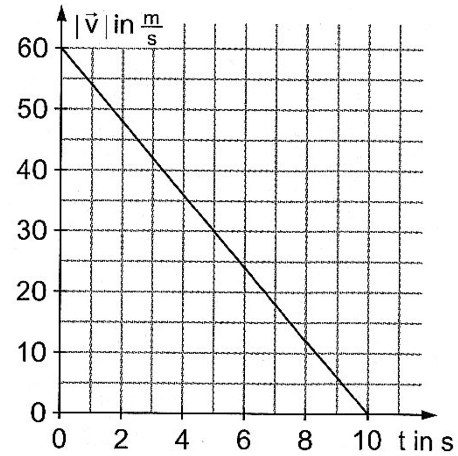
wobei G die Gravitationskonstante ist. **3**

1.2.0 Für einen solchen Kommunikationssatelliten kommen auch Synchronsatelliten in Frage.

1.2.1 Geben Sie an, was man unter einem „Synchronsatellit" versteht, und nennen Sie die Bedingungen, welche die Bewegung eines derartigen Satelliten im antriebslosen Zustand erfüllen muss. **4**

1.2.2 Berechnen Sie den Radius r_S der Kreisbahn eines solchen Synchronsatelliten mit den Daten aus Teilaufgabe 1.0. **5**

1.3.0 Mithilfe einer Transportfähre sollen Waren und Menschen von der Erde zum Mars transportiert werden. Im Folgenden dient als Bezugssystem eine für einen auf der Marsoberfläche stehenden Beobachter ruhende h-Achse. Diese ist vom Mittelpunkt des Mars radial nach außen orientiert. Die Höhe $h = 0$ befindet sich auf der Oberfläche des Mars. Die Fähre besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Höhe h_0 über der Marsoberfläche und befindet sich im Landeanflug, der entlang der h-Achse gleichmäßig absinkend bis zur Marsoberfläche verläuft.



Das Diagramm oben stellt für den idealisierten Landeanflug den Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Fähre bis zum Aufsetzen auf der Marsoberfläche zum Zeitpunkt $t = 10\,\text{s}$ dar.

1.3.1 Geben Sie an, um welche Art von Bewegung es sich hierbei im Zeitintervall $0 < t < 10\,\text{s}$ aus physikalischer Sicht handelt, und ermitteln Sie h_0. **4**

1.3.2 Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms für $0 < t < 10\,\text{s}$ den Betrag der Beschleunigung der Fähre. **2**

1.4.0 g_M ist der Betrag der Fallbeschleunigung auf der Marsoberfläche.

1.4.1 Zeigen Sie nach der Herleitung einer geeigneten Formel, dass $g_M = 3{,}73\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist. Die Eigenrotation des Mars kann hierbei vernachlässigt werden. **4**

1.4.2 Ein Astronaut wirft einen Ball auf der Erdoberfläche und später auf der Marsoberfläche mit jeweils derselben Abwurfgeschwindigkeit senkrecht nach oben. Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Luftreibung die Länge Δh_M der Strecke, die der Ball auf dem Mars während der Steigphase zurücklegt, wenn die entsprechende Länge auf der Erde $\Delta h_E = 10{,}0\,\text{m}$ beträgt. **5**

Musterlösung

1.1 Bahngeschwindigkeit des Satelliten

Da sich der Satellit mit der Masse m auf einer Kreisbahn um den Mars mit der Masse m_M bewegt, ist die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ die für die Kreisbahn des Körpers um das Zentralgestirn erforderliche Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$. Durch Gleichsetzen der zugehörigen Kraftbeträge lässt sich die gesuchte Formel herleiten:

$$|\vec{F}_{Grav}| = |\vec{F}_Z|$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_S^2} = m \cdot \frac{v_S^2}{r_S} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_S = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r_S}}}} \qquad (1)$$

1.2.1 Unter einem **Synchronsatelliten** versteht man einen Satelliten, der vom Zentralkörper (hier Mars) aus betrachtet über einem bestimmten Punkt des Zentralkörpers stillzustehen scheint.

Die Bewegung eines solchen Satelliten muss im antriebslosen Fall die folgenden **drei Bedingungen** erfüllen:

1. Der Satellit umkreist den Zentralkörper mit derselben **Winkelgeschwindigkeit,** mit der dieser um seine eigen Drehachse rotiert.
2. Der Drehsinn des Satelliten stimmt mit dem **Drehsinn** der Eigenrotation des Zentralkörpers überein.
3. Der Synchronsatellit umkreist den Zentralkörper im antriebslosen Fall in dessen **Äquatorebene.**

1.2.2 Radius der Kreisbahn des Synchronsatelliten

Lösungsmöglichkeit 1: Nutzung des Ergebnisses aus Teilaufgabe 1.1

Für die Bahngeschwindigkeit des Satelliten gilt zum einen die allgemeine Formel (1) aus Teilaufgabe 1.1, zum anderen aufgrund der Bedingung 1 für einen Synchronsatelliten um den Mars die Beziehung

$$v_S = \omega_S \cdot r_S = \frac{2\pi}{T_M} \cdot r_S. \qquad (2)$$

Durch Gleichsetzen der jeweils rechten Terme von (1) und (2) erhält man zunächst

$$\sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r_S}} = \frac{2\pi \cdot r_S}{T_M}$$

$$G \cdot \frac{m_M}{r_S} = \frac{4\pi^2 \cdot r_S^2}{T_M^2}$$

und durch Umstellen nach r_S schließlich:

$$r_S = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_M \cdot T_M^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 642 \cdot 10^{21}\,kg \cdot (24{,}6 \cdot 3\,600\,s)^2}{4\pi^2}} = \underline{\underline{20{,}4 \cdot 10^6\,m}}$$

Lösungsmöglichkeit 2: Kraftansatz für die vorliegende Kreisbewegung
Analog wie in Teilaufgabe 1.1 lautet der Kraftansatz für die Bewegung des Satelliten der Masse m um den Mars mit $\omega_s = \frac{2\pi}{T_M}$:

$$|\vec{F}_{Grav}| = |\vec{F}_Z|$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_S^2} = m \cdot \omega_S^2 \cdot r_S$$

$$G \cdot \frac{m_M}{r_S^2} = \frac{4\pi^2 \cdot r_S}{T_M^2} \quad \Rightarrow \quad r_S = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_M \cdot T_M^2}{4\pi^2}} \overset{\text{(wie oben)}}{=} \underline{\underline{20{,}4 \cdot 10^6\,m}}$$

1.3.1 Bei der beschriebenen Bewegung der Transportfähre handelt es sich um eine **geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung** (hier Verzögerung) mit Anfangsgeschwindigkeit.

Ermittlung von h_0

Lösungsmöglichkeit 1: direkt aus dem t-v-Diagramm
Die Höhe h_0 ist die Maßzahl des Inhalts der Fläche zwischen dem Graphen und der t-Achse für $0 \leq t \leq 10\,s$. Für die hier vorliegende Dreiecksfläche gilt:

$$h_0 = \frac{1}{2} \cdot 10\,s \cdot 60\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{0{,}30\,km}}$$

Lösungsmöglichkeit 2: mithilfe der Bewegungsgleichung
Dazu nutzt man die Formel für die geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung aus der Formelsammlung. Angepasst auf die vorliegende Situation lautet diese:

$$h(t) = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (3)$$

Hierbei stehen h, v und a für die Koordinaten der entsprechenden physikalischen Größen, wobei gilt:

- Die h-Achse ist radial nach außen orientiert. Die Höhe $h = 0$ befindet sich auf der Marsoberfläche. Somit besitzen die betrachteten Höhen ein positives Vorzeichen.
- Die Transportfähre bewegt sich in Richtung Mars. Folglich besitzt die Momentangeschwindigkeit v der Transportfähre ein negatives Vorzeichen.

- Für die Koordinate der Beschleunigung a erhält man:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Mithilfe des Diagramms erhält man z. B. $t_1 = 0$; $v_1 = -60\,\frac{m}{s}$; $t_2 = 10$ s; $v_2 = 0$ (beachten Sie, dass im Diagramm der Betrag der Momentangeschwindigkeit der Transportfähre dargestellt ist) und damit

$$a = \frac{0 - (-60\,\frac{m}{s})}{10\,s - 0} = 6{,}0\,\frac{m}{s^2}.$$

Aus (3) folgt durch Umstellen

$$h_0 = h(t) - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2,$$

sodass man für $t = t_2 = 10$ s, $h(t_2) = 0$, $v_0 = v_1 = -60\,\frac{m}{s}$ und $a = 6{,}0\,\frac{m}{s^2}$ erhält:

$$h_0 = 0 - \left(-60\,\frac{m}{s}\right) \cdot 10\,s - \frac{1}{2} \cdot 6{,}0\,\frac{m}{s^2} \cdot (10\,s)^2 = \underline{\underline{0{,}30\,km}}$$

1.3.2 Der **Betrag der Beschleunigung** ergibt sich aus dem Betrag der Steigung des Graphen im t-v-Diagramm.

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{60\,\frac{m}{s}}{10\,s} = \underline{\underline{6{,}0\,\frac{m}{s^2}}}$$

TIPP Wählen Sie für Ihre Werte ein möglichst großes Steigungsdreieck.
Sie können auch zunächst die Koordinate der Beschleunigung ermitteln und anschließend den Betrag angeben. Achten Sie dabei aber auf die richtigen Vorzeichen der Geschwindigkeiten (vgl. Lösungsmöglichkeit 2 in Teilaufgabe 1.3.1):

$$a = \frac{0 - (-60\,\frac{m}{s})}{10\,s - 0} = +6{,}0\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow |\vec{a}| = \underline{\underline{6{,}0\,\frac{m}{s^2}}}$$

1.4.1 Fallbeschleunigung auf dem Mars

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ auf einen Körper der Masse m auf der Marsoberfläche ist gleich der Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$ zwischen diesem Körper und dem Mars. Auf der Marsoberfläche gilt für die zugehörigen Beträge:

$$F_G = F_{Grav}$$

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r_M^2}$$

$$\Rightarrow g_M = G \cdot \frac{m_M}{r_M^2} = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{642 \cdot 10^{21}\,kg}{(3{,}39 \cdot 10^6\,m)^2} = \underline{\underline{3{,}73\,\frac{m}{s^2}}}$$

1.4.2 Länge der Steigstrecke auf dem Mars

Lösungsmöglichkeit 1: mit Bewegungsgleichungen des senkrechten Wurfes

Auf der Erde (Fallbeschleunigung g_E) gilt für den senkrechten Wurf nach oben mit dem Betrag v_0 der Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}_0$:

$$v^2 - v_0^2 = -2g_E \cdot \Delta h$$

Für $\Delta h = \Delta h_E$, also nach Durchlaufen der Steighöhe, ist die Endgeschwindigkeit null, $v = 0$, sodass folgt:

$$v_0^2 = 2g_E \cdot \Delta h_E \qquad (4)$$

Völlig analog gilt auf dem Mars (Fallbeschleunigung g_M) für den senkrechten Wurf nach oben mit dem Betrag v_0 derselben Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}_0$

$$v^2 - v_0^2 = -2g_M \cdot \Delta h$$

und entsprechend $v = 0$ für $\Delta h = \Delta h_M$, also:

$$v_0^2 = 2g_M \cdot \Delta h_M \qquad (5)$$

Nach Gleichsetzen der rechten Seiten von (4) und (5) ergibt sich:

$$2g_E \cdot \Delta h_E = 2g_M \cdot \Delta h_M$$

$$\Rightarrow \quad \Delta h_M = \frac{g_E}{g_M} \cdot \Delta h_E = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{3{,}73\,\frac{m}{s^2}} \cdot 10{,}0\,m = \underline{\underline{26{,}3\,m}}$$

Lösungsmöglichkeit 2: mit einer Energieüberlegung

Der Ball der Masse m erhält beim Abwurf auf der Erde und auf dem Mars dieselbe Abwurfgeschwindigkeit und damit auch dieselbe kinetische Energie vom Astronauten. Setzt man das Bezugsniveau der potenziellen Energie jeweils auf die Abwurfhöhe, gilt $\Delta h_E = h_E - 0 = h_E$ bzw. $\Delta h_M = h_M - 0 = h_M$ und damit

- auf der Erde:

$$E_{kin,\,Abwurf,\,E} = E_{pot,\,oben,\,E} = m \cdot g_E \cdot h_E = m \cdot g_E \cdot \Delta h_E$$

- auf dem Mars:

$$E_{kin,\,Abwurf,\,M} = E_{pot,\,M} = m \cdot g_M \cdot h_M = m \cdot g_M \cdot \Delta h_M$$

Da die kinetischen Energien in beiden Fällen gleich sind, folgt:

$$m \cdot g_E \cdot \Delta h_E = m \cdot g_M \cdot \Delta h_M$$

$$\Rightarrow \quad \Delta h_M = \frac{g_E}{g_M} \cdot \Delta h_E = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{3{,}72\,\frac{m}{s^2}} \cdot 10{,}0\,m = \underline{\underline{26{,}3\,m}}$$