1.0 Die Raumstation ISS ist das zurzeit größte künstliche Flugobjekt im Erdorbit. Ihre mittlere Flughöhe über der Erdoberfläche beträgt $h = 350\,\text{km}$. Für die folgenden Aufgaben soll angenommen werden, dass sich ISS antriebslos auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt.

Die Erde hat die Masse $m_E = 5{,}977 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ und den Radius $r_E = 6{,}368 \cdot 10^{6}\,\text{m}$.

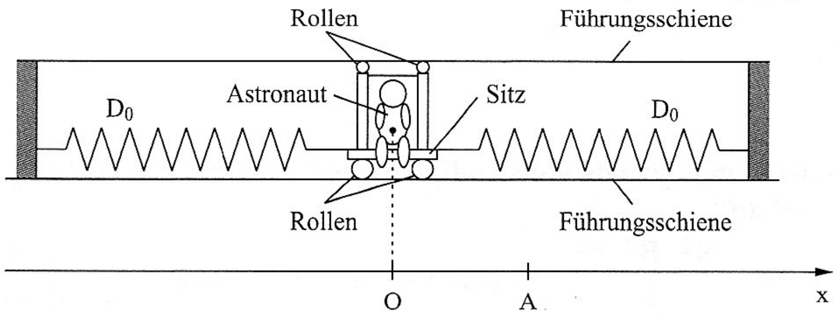
1.1 Leiten Sie aus dem Gravitationsgesetz eine Formel her, mit der sich der Betrag v der Bahngeschwindigkeit der Raumstation ISS aus den unter 1.0 gegebenen Größen berechnen lässt.
Berechnen Sie v mit dieser Formel. (5 BE)

1.2 Die Raumstation benötigt für einen vollen Umlauf die Zeit T.
Berechnen Sie T in der Einheit Stunden. (3 BE)

1.3 Die Masse eines Astronauten wird auf der Erde mithilfe einer Balkenwaage gemessen. Zu den regelmäßigen medizinischen Kontrolluntersuchungen an Bord der Raumstation gehört es auch, dass immer wieder die Masse des Astronauten bestimmt wird.
Erläutern Sie, warum an Bord der Raumstation die Masse des Astronauten nicht mit einer Balkenwaage bestimmt werden kann. (4 BE)

1.4.0 Die untenstehende Skizze zeigt eine Anordnung („Astronautenwaage"), mit der die Masse m eines Astronauten an Bord der Raumstation bestimmt werden kann. Der Astronaut nimmt auf einem Sitz Platz, der zwischen zwei Schraubenfedern mit der Federkonstanten $D_0 = 3{,}8 \cdot 10^{2}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ eingespannt ist.

Jede der beiden Federn ist um 60 cm vorgedehnt. Der Astronaut, der Sitz und die beiden Federn bilden ein schwingungsfähiges System. Ein Kollege lenkt den Sitz mit dem Astronauten um $A = 46\,\text{cm}$ aus und lässt dann den Sitz zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ aus der Ruhe heraus los. Der Sitz mit dem Astronauten schwingt nun harmonisch mit der Periodendauer $T = 2{,}0\,\text{s}$ um die Ruhelage O hin und her. Die Reibung in den Rollenlagern und die Reibung zwischen den Rollen und den Führungsschienen sind vernachlässigbar klein. Die potenzielle Energie des schwingungsfähigen Systems sei dann gleich null, wenn sich der Sitz mit dem Astronauten in der Ruhelage O befindet.



1.4.1 Berechnen Sie anhand eines Kräfteplans den Betrag F der Kraft $\vec{F}$, die der Kollege ausüben muss, um dem Sitz mit dem Astronauten die Elongation $A = 46\,\text{cm}$ zu erteilen. (5 BE)

1.4.2 Das unter 1.4.0 beschriebene schwingungsfähige System hat die Richtgröße $D = 7{,}6 \cdot 10^2 \frac{N}{m}$. Der Sitz selbst besitzt die Masse $m_S = 10$ kg.

Berechnen Sie die Masse m des Astronauten. (4 BE)

1.4.3 Berechnen Sie die Schwingungsenergie E_S des Systems.
[Ergebnis: $E_S = 80$ J] (3 BE)

1.4.4 Die kinetische Energie E_{kin} und die potenzielle Energie E_{pot} des schwingungsfähigen Systems sind abhängig von der Zeit t.
Stellen Sie diese Abhängigkeiten für $0\,s \leq t \leq 2{,}0\,s$ in einem t-E-Diagramm dar. (5 BE)

Musterlösung

1.1 Die Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$ ist die für eine Kreisbahn um die Erde notwendige Zentralkraft $\vec{F}_Z$. Durch Gleichsetzen der Beträge lässt sich daher die **Bahngeschwindigkeit** berechnen (m: Masse der ISS; m_E: Erdmasse; r: Bahnradius):

$$F_Z = F_{Grav}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = G \cdot \frac{m_E}{r}$$

$$= G \cdot \frac{m_E}{r_E + h}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v = \sqrt{G \cdot \frac{m_E}{r_E + h}}}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert:

$$v = \sqrt{6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg}{(6{,}368 \cdot 10^6\,m + 350 \cdot 10^3\,m)}}$$

$$\underline{\underline{= 7{,}71 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 7{,}71 \frac{km}{s}}}$$

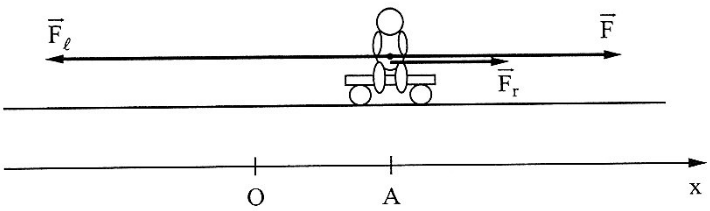
1.2 Für die **Umlaufdauer** auf der Kreisbahn gilt:

$$T = \frac{2r \cdot \pi}{v} = \frac{2\pi \cdot (r_E + h)}{v}$$

$$= \frac{2\pi \cdot (6{,}368 \cdot 10^6\,m + 350 \cdot 10^3\,m)}{7{,}71 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}} = 5{,}47 \cdot 10^3\,s = \underline{\underline{1{,}52\,h}}$$

1.3 Bei der **Balkenwaage** wird die Masse eines Körpers über die an ihm angreifende Gravitationskraft bestimmt (Gewichtskraft). Auf der einen Waagschale befindet sich die zu bestimmende Masse, auf der anderen Waagschale eine Vergleichsmasse. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn auf beide Waagschalen die gleiche Kraft wirkt, also die Massen gleich sind.
Auf einer antriebslos durchlaufenen Kreisbahn wirkt die Gravitationskraft ausschließlich als notwendige Zentralkraft für diese Kreisbahn, auf die Waagschalen werden **keine weiteren Kräfte** ausgeübt; es wirkt keine Gewichtskraft. Eine Massebestimmung wie auf der Erde ist damit in der Raumstation nicht möglich.

1.4.1 Die Abbildung rechts zeigt den **Kräfteplan**. Auf den Astronauten wirken die Federkräfte $\vec{F}_\ell$ der linken Feder, $\vec{F}_r$ der rechten Feder und die Kraft $\vec{F}$ des Kollegen.



Beachten Sie, dass die Federn um je 60 cm vorgedehnt sind. Die rechte Feder wird deshalb durch die Auslenkung des Sitzes nach rechts um die Strecke 46 cm nicht gestaucht, sondern nur entspannt; die zugehörige Federkraft $\vec{F}_r$ zeigt nach rechts.

Ist der Sitz ausgelenkt, so kompensieren sich die angreifenden Kräfte:

$$\vec{F}_\ell + \vec{F}_r + \vec{F} = \vec{0}$$

Berücksichtigt man die Kraftrichtungen durch den Einheitsvektor $\vec{e}_x$, der in die positive x-Richtung zeigt, erhält man

$$-F_\ell \cdot \vec{e}_x + F_r \cdot \vec{e}_x + F \cdot \vec{e}_x = \vec{0} \quad \text{bzw.} \quad F_\ell \cdot \vec{e}_x = (F_r + F) \cdot \vec{e}_x$$

und somit für die Beträge ($|\vec{e}_x| = 1$):

$$F_\ell = F_r + F$$

Ist s_0 die Vordehnung, so folgt für die **Kraft**, die der Kollege ausüben muss:

$$\begin{aligned} F &= F_\ell - F_r \\ &= D_0 \cdot (s_0 + A) - D_0 \cdot (s_0 - A) \\ &= 2D_0 \cdot A \\ &= 2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}46 \text{ m} = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^2 \text{ N}}} \end{aligned}$$

1.4.2 Für die Schwingungsdauer T einer harmonischen Schwingung gilt allgemein:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_{ges}}{D}} \quad \Rightarrow \quad m_{ges} = \frac{D \cdot T^2}{4\pi^2}$$

Mit $m_{ges} = m + m_S$ erhält man für die **Masse des Astronauten**:

$$\begin{aligned} m &= \frac{D \cdot T^2}{4\pi^2} - m_S \\ &= \frac{7{,}6 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (2{,}0 \text{ s})^2}{4\pi^2} - 10 \text{ kg} = \underline{\underline{67 \text{ kg}}} \end{aligned}$$

1.4.3 Die **Schwingungsenergie** E_S ist gleich der maximalen potenziellen Energie $E_{pot}(t_0)$ beim Loslassen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s:

$$E_S = \frac{1}{2} D \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}6 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}46 \text{ m})^2 = \underline{\underline{80 \text{ J}}}$$

1.4.4 Es gilt für die potenzielle Energie mit der Startbedingung $E_{pot}(0 \text{ s}) = E_{pot,\,max} = E_S$:

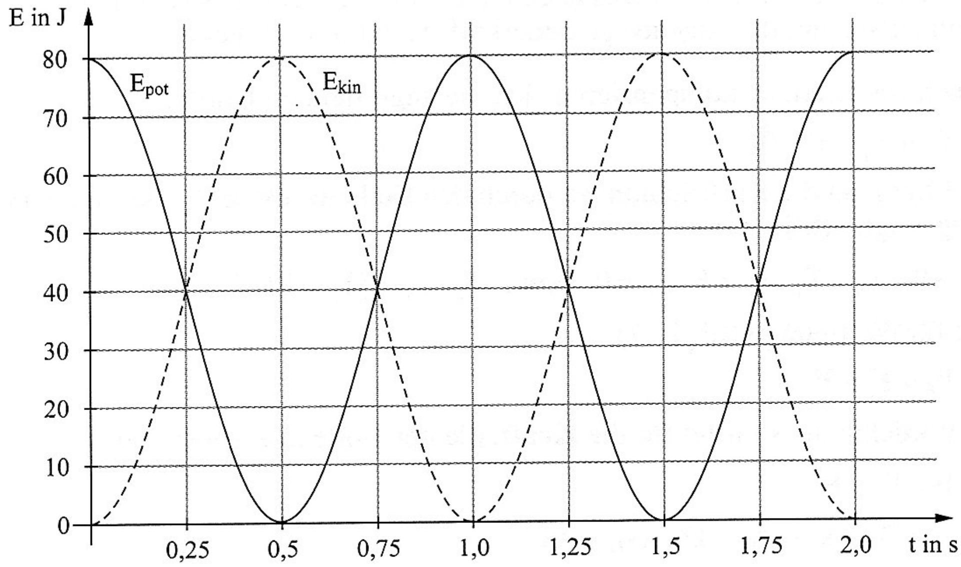
$$E_{pot}(t) = 80 \text{ J} \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 80 \text{ J} \cdot \cos^2\left(\pi \frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$$

Die kinetische Energie ist jeweils durch die Differenz zur Gesamtenergie E_S gegeben.

Wertetabelle (wegen der Periodizität der Energiefunktionen nur für $0 \text{ s} \leq t \leq 0{,}5 \text{ s}$)

t in s	0	0,125	0,25	0,375	0,5
E_{pot} in J	80	68,3	40	11,7	0
$E_{kin} = 80 \text{ J} - E_{pot}$	0	11,7	40	68,3	80

t-E-Diagramm


E in J
80
70
60
50
40
30
20
10
0
E_{pot}
E_{kin}
0,25
0,5
0,75
1,0
1,25
1,5
1,75
2,0
t in s