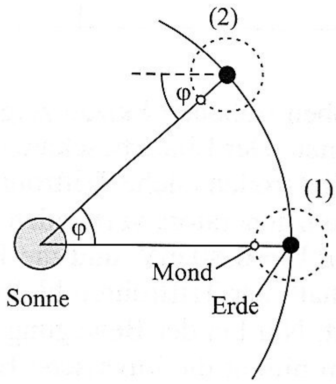
1.0 Ein Satellit bewegt sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius R um die Erde. Für einen Umlauf benötigt der Satellit die Zeit T. Die Erde hat den Äquatorradius $r_E = 6{,}368 \cdot 10^6$ m und die Masse $m_E = 5{,}977 \cdot 10^{24}$ kg. Die Gravitationskonstante hat den Wert $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

1.1 Leiten Sie aus dem Gravitationsgesetz eine Formel her, mit der die Umlaufdauer T aus der Gravitationskonstante G, der Masse m_E und dem Bahnradius R berechnet werden kann. (4 BE)

1.2.1 Erläutern Sie, was man unter einem Synchronsatelliten der Erde versteht, und geben Sie an, welche Bedingungen die Bewegung eines antriebslos fliegenden Satelliten erfüllen muss, damit dieser sich als Synchronsatellit um die Erde bewegt. (4 BE)

1.2.2 Ein Synchronsatellit umkreist die Erde in der Höhe h über der Erdoberfläche und besitzt dabei eine Bahngeschwindigkeit mit dem Betrag v.
Berechnen Sie h und v. (6 BE)

1.3.0 Die Erde besitzt nur einen natürlichen Satelliten, nämlich den Mond (Erdmond). Für die folgenden Aufgaben soll die Umlaufbahn, auf der sich der Mond um die Erde bewegt, eine Kreisbahn sein, deren Mittelpunkt der Massenmittelpunkt der Erde ist. Für einen Umlauf auf dieser Kreisbahn benötigt der Mond die Zeit $T_M = 27{,}32$ d. Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R_E = 149{,}6 \cdot 10^9$ m um die Sonne und benötigt für einen Umlauf die Zeit $T_E = 365{,}25$ d.



1.3.1 Berechnen Sie für die Bewegung des Mondes um die Erde die Winkelgeschwindigkeit ω_M und den Radius R_M der Umlaufbahn. (4 BE)

1.3.2 Die Skizze unter 1.3.0 zeigt die Konstellationen von Sonne, Erde und Mond für zwei aufeinander folgende Neumondphasen (1) und (2). Bei der in der Skizze dargestellten Sicht sind der Umlaufsinn der Erde und der Umlaufsinn des Mondes entgegen dem Uhrzeigersinn gerichtet.
Berechnen Sie die Zeit t_N, die zwischen diesen beiden Neumondphasen vergeht. (5 BE)

1.1 Die Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$ ist die für eine auf einer Kreisbahn mit dem Radius R umlaufende Masse m notwendige Zentralkraft $\vec{F}_Z$. Für die Beträge dieser Kräfte gilt:

$$F_{Grav} = F_Z$$

$$G \cdot \frac{m \cdot m_E}{R^2} = m \cdot R \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

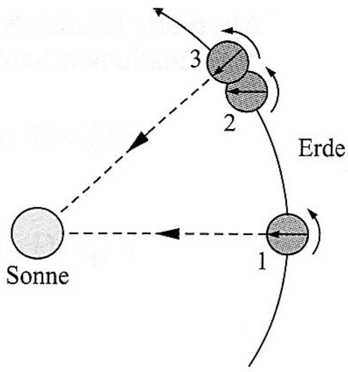
Durch Umstellen und Radizieren erhält man die gesuchte **Formel für die Umlaufdauer**:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot m_E}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot m_E}} \qquad \text{(G1)}$$

1.2.1 Ein **Synchronsatellit** ist ein Satellit, der die Erde so umkreist, dass er von der Erde aus betrachtet seine Position nicht verändert.
Für einen Synchronsatelliten müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
- Die Umlaufbahn liegt in der Äquatorebene.
- Die Umlaufdauer des Satelliten und die Zeit für eine vollständige Umdrehung der Erde stimmen überein (siehe Bemerkung unten)
- Die Umlaufsrichtung stimmt mit der Drehrichtung der Erdrotation überein.

Wie lange dauert eine **vollständige Umdrehung** der Erde? Betrachten Sie hierzu die Skizze rechts: Auf dem Weg von 1 nach 2 macht die Erde eine vollständige Umdrehung. Damit die Sonne von der Erde aus wieder an der gleichen Position erscheint, muss sich die Erde noch einen kleinen Winkel (ca. 1°) weiter drehen; während dieser zusätzlichen Drehung bewegt sie sich weiter von 2 nach 3. Von 1 nach 3 braucht die Erde 24 Stunden, das ist der mittlere Sonnentag. Für die Eigenrotation um 1° benötigt die Erde ca. 4 Minuten, d. h. für eine vollständige Umdrehung (von 1 nach 2) braucht die Erde nur etwa 23 Stunden und 56 Minuten, das sind annähernd 23,93 h. In der folgenden Aufgabe ist deshalb die Umlaufdauer nur mit drei signifikanten Stellen angegeben.



1.2.2 Aus der Gleichung G1 ergibt sich mit $T = T_S = 24{,}0\ \text{h}$ für den Radius $R_S = r_E + h$ der Synchronbahn:

$$R_S^3 = G \cdot m_E \cdot \frac{T_S^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad R_S = \sqrt[3]{G \cdot m_E \cdot \frac{T_S^2}{4\pi^2}} \qquad \text{(G2)}$$

$$= \sqrt[3]{6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\ kg \cdot \left(\frac{24{,}0 \cdot 3600\ s}{2\pi}\right)^2}$$

$$= 42{,}25 \cdot 10^3\ km$$

Der Satellit fliegt somit in einer **Höhe**

$$h = R_S - r_E = 42{,}25 \cdot 10^3\ \text{km} - 6{,}368 \cdot 10^3\ \text{km} = \underline{\underline{35{,}9 \cdot 10^3\ \text{km}}}$$

über der Erdoberfläche, seine **Bahngeschwindigkeit** beträgt

$$v = \frac{2\pi \cdot R_S}{T_S} = \frac{2\pi \cdot 42{,}25 \cdot 10^6\ \text{m}}{24{,}0 \cdot 3600\ \text{s}} = \underline{\underline{3{,}07\ \frac{\text{km}}{\text{s}}}}.$$

1.3.1 Für die **Winkelgeschwindigkeit ω_M** des Mondumlaufs gilt:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{2\pi}{27{,}32 \cdot 24{,}00 \cdot 3600\ \text{s}} = \underline{\underline{2{,}662 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\text{s}}}}$$

Mithilfe von Gleichung G2 lässt sich damit der **Bahnradius R_M** berechnen:

$$R_M = \sqrt[3]{G \cdot m_E \cdot \frac{T_M^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{G \cdot m_E \cdot \frac{1}{\omega_M^2}}$$

$$= \sqrt[3]{6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1\ \text{s}}{2{,}662 \cdot 10^{-6}}\right)^2}$$

$$= \underline{\underline{3{,}832 \cdot 10^8\ \text{m}}}$$

Alternativ können Sie R_M auch unter Verwendung des in 1.2.2 ermittelten Bahnradius R_S des künstlichen Satelliten berechnen:

$$\left.\begin{aligned} R_S^3 &= G \cdot m_E \cdot \frac{T_S^2}{4\pi^2} \\ R_M^3 &= G \cdot m_E \cdot \frac{T_M^2}{4\pi^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R_S^3}{R_M^3} = \frac{T_S^2}{T_M^2} \Rightarrow R_M = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_S}\right)^2} \cdot R_S$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{27{,}32\ \text{d}}{1\ \text{d}}\right)^2} \cdot 42{,}25 \cdot 10^3\ \text{km}$$

$$= (27{,}32)^{\frac{2}{3}} \cdot 42{,}25 \cdot 10^3\ \text{km}$$

$$= \underline{\underline{3{,}832 \cdot 10^5\ \text{km}}}$$

1.3.2 Während die Erde sich um den Winkel φ weiter bewegt, macht der Mond zusätzlich eine volle Umrundung der Erde, er bewegt sich also um den Winkel $\varphi + 2\pi$. Damit gilt:

$$\omega_M \cdot t_N = \varphi + 2\pi \qquad (1)$$

$$\omega_E \cdot t_N = \varphi \qquad (2)$$

(1) – (2) liefert:

$$\omega_M \cdot t_N - \omega_E \cdot t_N = 2\pi$$

$$\Rightarrow\ t_N = \frac{2\pi}{\omega_M - \omega_E} \qquad (3)$$

ω_M ist aus 1.3.1 bekannt, ω_E kann ebenso zu

$$\frac{2\pi}{T_E} = \frac{2\pi}{365{,}25 \cdot 24{,}00 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 1{,}991 \cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

bestimmt werden, sodass man für die **Zeit t_N zwischen den Neumondphasen** erhält:

$$t_N = \frac{2\pi}{2{,}662 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\mathrm{s}} - 1{,}991 \cdot 10^{-7}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 2{,}551 \cdot 10^{6}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{29{,}53\,\mathrm{d}}}$$

Auch hier können Sie alternativ über die Umlaufzeiten anstatt über die Winkelgeschwindigkeiten rechnen und ersparen sich so die Umrechnung der Zeiteinheiten. Mit $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ und $\omega_E = \frac{2\pi}{T_E}$ ergibt sich eingesetzt in (3):

$$t_N = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_E}} = \frac{T_E \cdot T_M}{T_E - T_M} = \frac{365{,}25\,\mathrm{d} \cdot 27{,}32\,\mathrm{d}}{365{,}25\,\mathrm{d} - 27{,}32\,\mathrm{d}} = \underline{\underline{29{,}53\,\mathrm{d}}}$$