2.0 Weltraum-Tourismus ist heute ein realistisches Ziel. Bereits Anfang der neunziger Jahre stellten japanische Ingenieure den Entwurf eines Space-Hotels vor, das in der Höhe $h = 450$ km über der Erdoberfläche die Erde antriebslos umkreisen und rund 100 Gästen Platz bieten soll.
Das Space-Hotel ist Teil einer Raumstation. Die Umlaufbahn der Raumstation liegt in der Äquatorebene der Erde. Der Umlaufsinn der Raumstation und der Drehsinn der Erde bei ihrer Drehung um die eigene Achse sind identisch.

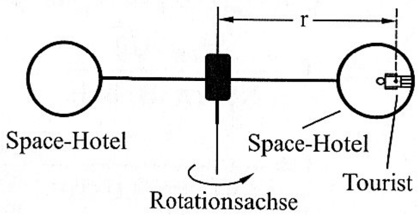
2.1 Berechnen Sie ausgehend von einem Kraftansatz den Betrag v_R der Bahngeschwindigkeit der Raumstation und ihre Umlaufdauer T_R. (6 BE)

2.2.0 Der Transport von Nutzlasten von der Erde zur Raumstation erfolgt mit einer Rakete, deren Startplatz am Äquator der Erde liegt.
Der Einfluss der Erdatmosphäre auf die Bewegung der Rakete soll unberücksichtigt bleiben.

2.2.1 Für diese Teilaufgabe wird vereinfachend die Drehung der Erde um die eigene Achse nicht berücksichtigt, also der Startplatz der Rakete als ruhend betrachtet.
Berechnen Sie die Arbeit W, die beim Transport zur Raumstation an einem Kilogramm Nutzlast ($m_N = 1{,}00$ kg) zu verrichten ist. (5 BE)

2.2.2 Bei der unter 2.2.0 beschriebenen Wahl des Startplatzes wird die Eigenrotation der Erde optimal genutzt, so dass die beim Transport an einem Kilogramm Nutzlast zu verrichtende Arbeit um den Betrag ΔW geringer ist als die unter 2.2.1 berechnete Arbeit.
Berechnen Sie ΔW. (4 BE)

2.3.0 Das Space-Hotel hat die Form einer ringförmigen Röhre.
Die nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Skizze zeigt einen Querschnitt.
Die antriebslos um die Erde fliegende Raumstation kann in eine Drehbewegung versetzt werden. Dabei rotiert das Space-Hotel um die in der Skizze angegebene Rotationsachse.



2.3.1 Begründen Sie, warum sich ein Tourist ohne eine solche Drehbewegung schwerelos fühlt. (3 BE)

2.3.2 Die Raumstation wird in eine Drehbewegung mit der Drehfrequenz f versetzt. Der Schwerpunkt eines Touristen bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = 70$ m. Der Tourist fühlt sich nun nicht mehr schwerelos.
Berechnen Sie die Drehfrequenz f, bei der sich der Tourist genauso schwer fühlt wie auf der Erdoberfläche. Erläutern Sie Ihren Lösungsansatz (6 BE)

2.1 Die Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$ zwischen Erde und Raumstation ist die für die Kreisbahn notwendige Zentralkraft $\vec{F}_Z$. Es gilt also für die Beträge:

$$G^* \cdot \frac{m_E \cdot m_R}{r^2} = m_R \cdot \frac{v_R^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v_R^2 = G^* \cdot \frac{m_E}{r}$$

Darin bezeichnen m_E die Masse der Erde, m_R die Masse der Raumstation, r_E den Erdradius, $r = r_E + h$ den Bahnradius und v_R die Bahngeschwindigkeit der Raumstation. Mit $r = 6{,}378 \cdot 10^6\ \text{m} + 450 \cdot 10^3\ \text{m} = 6{,}828 \cdot 10^6\ \text{m}$ erhält man:

$$v_R^2 = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}828 \cdot 10^6\ \text{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_R = 7{,}64 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Umlaufdauer:

$$T_R = \frac{2r\pi}{v_R} \quad \Rightarrow \quad T_R = \frac{2 \cdot 6{,}828 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \pi}{7{,}64 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{5{,}61 \cdot 10^3\ \text{s} = 1{,}56\ \text{h}}}$$

2.2.1 Da die Raumstation sich mit der Geschwindigkeit v_R auf der Kreisbahn bewegt, muss an der Masse m_N sowohl die Hubarbeit W_h als auch die Beschleunigungsarbeit W_a verrichtet werden. Es gilt:

$$W_h = G^* \cdot m_E \cdot m_N \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r}\right)$$

und

$$W_a = \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot v_R^2$$

Es kann mit bekannten Werten die Transportarbeit $W_{ges} = W_h + W_a$ berechnet werden. Mithilfe der Beziehung für v_R^2 aus Teilaufgabe 2.1 kann man aber auch zuerst allgemein zusammenfassen und dann die Werte einsetzen.

Man erhält:

$$W_a = \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot v_R^2 = \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot G^* \cdot \frac{m_E}{r}$$

$$\Rightarrow \quad W_{ges} = G^* \cdot m_E \cdot m_N \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot G^* \cdot \frac{m_E}{r}$$

$$= G^* \cdot m_E \cdot m_N \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \right) = G^* \cdot m_E \cdot m_N \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{2r} \right)$$

$$W_{ges} = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1{,}00\ kg \cdot \left(\frac{1}{6{,}378} - \frac{1}{2 \cdot 6{,}828} \right) \cdot \frac{1}{10^6\ m}$$

$$\underline{\underline{W_{ges} = 3{,}33 \cdot 10^7\ J}}$$

2.2.2 Wegen der Eigenrotation der Erde hat die Nutzlast beim Start bereits kinetische Energie, die am Startplatz Äquator den maximal möglichen Wert hat. Es gilt:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot v_{Äquator}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_N \cdot \left(\frac{2 \cdot r_E \cdot \pi}{T_E} \right)^2$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot 1{,}00\ kg \cdot \left(\frac{2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6\ m \cdot \pi}{24 \cdot 3600\ s} \right)^2 = \underline{\underline{1{,}08 \cdot 10^5\ J}}$$

2.3.1 **Aus der Sicht eines ruhenden Beobachters**

Am Ort der Kreisbahn wirkt ausschließlich die Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$. Sie ist die Ursache für die beschleunigende Kraft $\vec{F}_a = \vec{F}_Z$ und die Gewichtskraft $\vec{F}_G$, wobei gilt:

$$\vec{F}_{grav} = \vec{F}_a + \vec{F}_G$$

Nach Teilaufgabe 2.1 gilt auf der antriebslos durchlaufenen Kreisbahn:

$$\vec{F}_{Grav} = \vec{F}_Z = \vec{F}_a \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_G = \vec{0}$$

Der Tourist ist schwerelos.

Aus der Sicht des mitbewegten Beobachters

Auf einen sich auf der Kreisbahn bewegenden Körper wirkt die Gravitationskraft $\vec{F}_{Grav}$ und die entgegengesetzt gerichtete Zentrifugalkraft $\vec{F}_{Z\,fug}$. Bewegt sich die Raumstation antriebslos, so sind die Beträge der beiden Kräfte gleich und ihre Summe ist null. Der Tourist ist schwerelos.

2.3.2 Wird die Raumstation in Rotation versetzt, erfährt der Tourist (aus seiner Sicht) eine Zentrifugalkraft $\vec{F}_{rot\,fug}$, die senkrecht zur Rotationsachse und von dieser weg gerichtet ist. Er fühlt sich nicht mehr schwerelos, der Ort der Rotationsachse ist für ihn „oben". Um den gleichen Schwereeindruck wie auf der Erde zu erzeugen, muss gelten:

$$\vec{F}_{rot,fug} = \vec{F}_G \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot g$$

Die Masse m des Touristen kürzt sich heraus, sodass folgt:

$$\omega^2 = \frac{g}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{9{,}81\ \frac{m}{s^2}}{70\ m}} = \underline{\underline{0{,}060\ Hz}}$$