1.0 Für alle Körper, die sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius R und der Umlaufdauer T um ein Zentralgestirn mit der Masse m_Z bewegen, gilt das 3. keplersche Gesetz $\frac{T^2}{R^3} = C$, wobei C eine Konstante ist.

1.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Gravitationsgesetzes, dass für die Konstante C gilt: $C = \frac{4 \cdot \pi^2}{G^* \cdot m_Z}$, wobei G* die Gravitationskonstante ist. (3 BE)

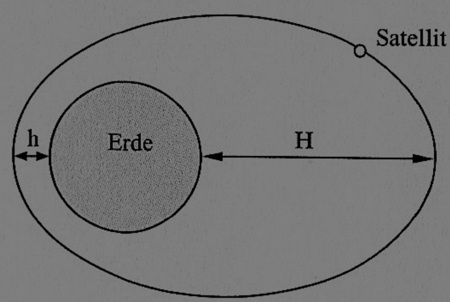
1.2 Die Masse der Erde beträgt $m_E = 5{,}977 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie die Konstante C_E des 3. keplerschen Gesetzes für Körper, die sich antriebslos um die Erde bewegen. (2 BE)

1.3.0 Ein Satellit bewegt sich antriebslos im Gravitationsfeld der Erde. Man bezeichnet diesen Satelliten als Synchronsatelliten der Erde, wenn er von der Erde aus betrachtet stillzustehen scheint.

1.3.1 Geben Sie an, welche Bedingungen die Bewegung des Satelliten erfüllen muss, damit er sich als Synchronsatellit um die Erde bewegt. (3 BE)

1.3.2 Die Umlaufbahn eines Synchronsatelliten der Erde besitzt den Radius R_{syn}. Berechnen Sie R_{syn} und den Betrag der Bahngeschwindigkeit eines Synchronsatelliten. (6 BE)

1.4.0 Am 31. Januar 1958 gelingt es den Raumfahrtbehörden der USA erstmals einen Satelliten in eine Erdumlaufbahn zu bringen. Der Satellit bewegt sich antriebslos auf einer Ellipsenbahn (siehe nebenstehende, nicht maßstabsgetreue Skizze). Die geringste Höhe über der Erdoberfläche beträgt h = 360 km, die größte Höhe H = 2 547 km. Die größte Geschwindigkeit des Satelliten auf der Ellipsenbahn hat den Betrag $v_{max} = 8{,}22 \, \frac{km}{s}$. Der Erdradius beträgt $r_E = 6{,}368 \cdot 10^6$ m.



1.4.1 Berechnen Sie den Betrag der Gravitationsfeldstärke für den erdfernsten Punkt der Ellipsenbahn. (2 BE)

1.4.2 Berechnen Sie die Umlaufdauer T des Satelliten. (4 BE)

1.4.3 v_{min} ist der kleinste Betrag der Bahngeschwindigkeit des Satelliten. Leiten Sie eine Formel her, mit der sich v_{min} aus den Größen G*, m_E, h, H und v_{max} berechnen lässt. Berechnen Sie v_{min} mit dieser Formel. (7 BE)

Musterlösung

1.1 Für eine antriebslos um ein Zentralgestirn umlaufende Masse m ist die Gravitationskraft $\vec{F}_{Gr}$ die für einen Umlauf auf einer Kreisbahn notwendigen Zentralkraft $\vec{F}_Z$.

Es gilt dann: $F_{Gr} = F_Z$

$$G^* \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} = m \cdot R \cdot \omega^2 = m \cdot R \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G^* \cdot m_Z} = C$$

1.2 $$C_E = \frac{4\pi^2}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24} kg} = 9{,}898 \cdot 10^{-14} \frac{s^2}{m^3}$$

1.3.1 Es müssen 3 Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Satellit muss die Erde in der Äquatorebene umkreisen.
2. Seine Umlaufbahn muss mit der Drehrichtung der Erde übereinstimmen (von West nach Ost)
3. Die Umlaufdauer des Satelliten muss 24 h betragen.

1.3.2 Es gilt:

$$\frac{T_{Syn}^2}{R_{Syn}^3} = C_E$$

$$\Rightarrow R_{Syn}^3 = \frac{T_{Syn}^2}{C_E} = \frac{(24{,}00 \cdot 3600\,s)^2}{9{,}898 \cdot 10^{-14} \frac{s^2}{m^3}}$$

$$\underline{\underline{R_{Syn} = 42{,}25 \cdot 10^6\,m}}$$

$$v_{Syn} = R_{Syn} \cdot \omega = R_{Syn} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$v_{Syn} = 42{,}25 \cdot 10^6\,m \cdot \frac{2\pi}{24{,}00 \cdot 3600\,s}$$

$$\underline{\underline{v_{Syn} = 3{,}073 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}}$$

1.4.1 Für die Gravitationsfeldstärke g_H in der Höhe H gilt:

$$g_H = G^* \cdot \frac{m_E}{(r_E + H)^2}$$

$$g_H = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}977 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6{,}368 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 2{,}547 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2}$$

$$\underline{\underline{g_H = 5{,}018 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

1.4.2 Das 3. keplersche Gesetz gilt auch für Ellipsenbahnen, wenn man R durch die große Halbachse a der Bahnellipse ersetzt. Es gilt:

$$\frac{T^2}{a^3} = C_E \qquad \text{mit } a = \frac{1}{2}(H + h + 2 \cdot r_E)$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = a^3 \cdot C_E$$

$$T^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot (2{,}547 + 0{,}360 + 2 \cdot 6{,}368) \cdot 10^6\,\mathrm{m}\right]^3 \cdot 9{,}898 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}$$

$$T^2 = (7{,}82 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3 \cdot 9{,}898 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T = 6{,}88 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 115\,\mathrm{min}}}$$

1.4.3 Die Gesamtenergie des Satelliten mit der Masse m_S bleibt auch auf der elliptischen Bahn konstant. Deshalb gilt:

$$E_{pot,H} + E_{kin,H} = E_{pot,h} + E_{kin,h}$$

Wählt man für die potenzielle Energie das Bezugsniveau im Unendlichen, so gilt allgemein:

$$E_{pot}(r) = -G^* \cdot m_s \cdot m_E \cdot \frac{1}{r} \qquad (*)$$

Nach dem 2. keplerschen Gesetz hat der Satellit seine größte Geschwindigkeit beim kleinsten Abstand zur Erde. Es gilt dann:

$$-G^* \cdot m_s \cdot m_E \cdot \frac{1}{r_E + H} + \frac{1}{2} m_s \cdot v_{min}^2 = -G^* \cdot m_s \cdot m_E \cdot \frac{1}{r_E + h} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_{max}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} v_{min}^2 = G^* \cdot m_E \cdot \frac{1}{r_E + H} - G^* \cdot m_E \cdot \frac{1}{r_E + h} + \frac{1}{2} v_{max}^2$$

$$v_{min}^2 = 2 \cdot G^* \cdot m_E \cdot \left(\frac{1}{r_E + H} - \frac{1}{r_E + h}\right) + v_{max}^2$$

$$r_E + H = 8{,}915 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

$$r_E + h = 6{,}728 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

$$v_{min}^2 = 2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg$$

$$\cdot \left(\frac{1}{8{,}915} - \frac{1}{6{,}728} \right) \cdot \frac{1}{10^6\,m} + \left(8{,}22 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \right)^2$$

$$\underline{\underline{v_{min} = 6{,}20 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}}$$

Hinweis zur Gleichung (*):

Die potentielle Energie ist die Verschiebungsarbeit der Feldkraft ins Bezugsniveau. Für diese Verschiebungsarbeit gilt allgemein:

$$W_{1 \to 2} = -G^* \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für $r_2 \to \infty$ erhält man mit den relevanten Bezeichnungen die Gleichung (*).