1996, Teil II

1.0 Jupiter, der größte und massenreichste Planet unseres Sonnensystems wird von 16 Monden begleitet, von denen vier bereits im Jahre 1610 von Galilei mit einem kleinen Prismenfernrohr entdeckt wurden. In der einschlägigen Fachliteratur zur Astronomie findet man dazu folgende Daten:

Name des Mondes	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
Entfernung r zum Jupitermittelpunkt in 10^8 m	4,22	6,71	10,7	18,8
Umlaufperiode T in Tagen	1,77	3,55	7,16	16,69

Die Umlaufbahnen der Monde sollen als Kreisbahnen angesehen werden; der Einfluß anderer Himmelskörper ist zu vernachlässigen.

1.1 Zeigen Sie durch graphische Auswertung der Monddaten in der Tabelle 1.0, daß für die Beträge der Bahngeschwindigkeiten $\vec{v}_B$ der Monde die Gleichung

$$v_B = k \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

gilt, wobei k eine Konstante ist. Verwenden Sie dazu nur Daten aus 1.0. (7 BE)

(Maßstab: $1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}; 2 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$)

1.2 Zeigen Sie durch allgemeine Herleitung, ausgehend von einem Kraftansatz, daß für die Konstante k aus 1.1 gilt:

$$k = \sqrt{G \cdot m_J}\,,$$

wobei G = Gravitationskonstante, m_J = Masse des Jupiters. (3 BE)

1.3 Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms von 1.1 die Konstante k, und ermitteln Sie daraus die Masse m_J des Jupiters. (3 BE)

1.4.0 Die amerikanische Planetensonde Voyager II bewegte sich antriebslos auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_S in der Äquatorebene des Jupiters (Masse $m_J = 1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg), der sich mit der Rotationsperiode $T_J = 9{,}92$ h um die Achse dreht.

1.4.1 Berechnen Sie den Bahnradius r_S und den Betrag der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_s$ der Sonde, wenn diese über einem Punkt des Jupiteräquators stationär bleiben soll. [Teilergebnis: $r_S = 1{,}60 \cdot 10^8$ m] (6 BE)

1.5.0 Voyager II wird nun auf eine Kreisbahn mit dem Radius r_1 gebracht. Auf dieser Kreisbahn ist die Umlaufperiode doppelt so groß wie auf der stationären Kreisbahn.

1.5.1 Zeigen Sie, daß für diese Kreisbahn die Beziehung gilt: $r_1 = r_S \cdot \sqrt[3]{4}$. (3 BE)

1.5.2 Zeigen Sie, daß für den Kreisbahnwechsel von r_S nach r_1 für die gesamte Energieänderung ΔE von Voyager II (Masse $m_V = 450$ kg) gilt: (7 BE)

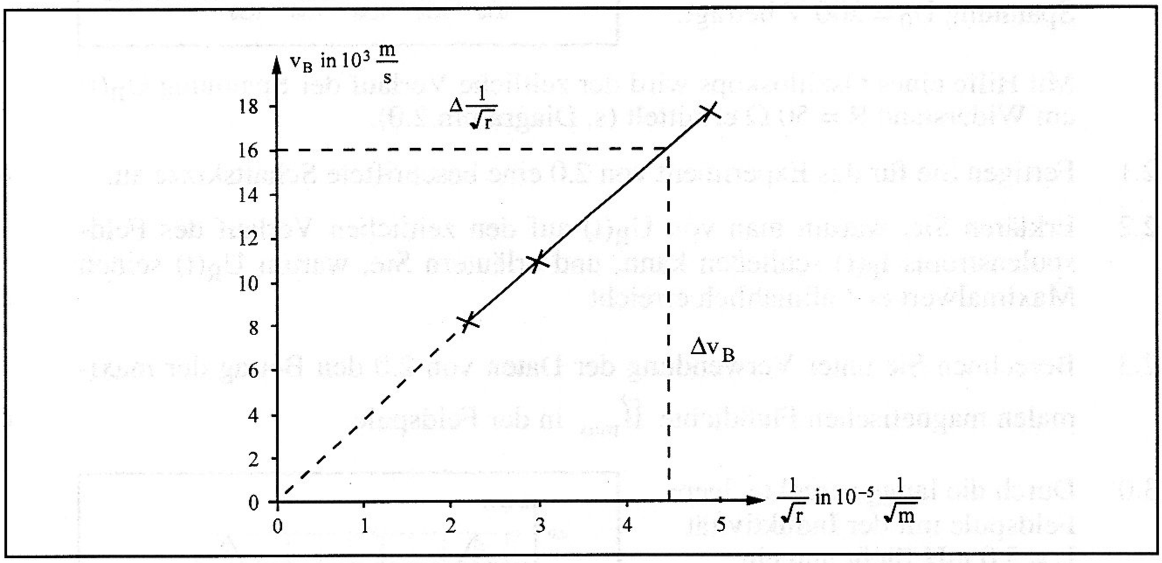
$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot G \cdot m_J \cdot m_V \cdot \frac{1}{r_S} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right).$$ Berechnen Sie ΔE.

Musterlösung

1.1 Die für die Graphik notwendigen Wertepaare müssen erst berechnet werden, wobei für den Betrag der Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v_B = \frac{2r\pi}{T} \quad \text{und } 1 \text{ Tag} = 86{,}4 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Mond	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
$\frac{1}{\sqrt{r}}$ in $\frac{1}{\sqrt{m}}$	$4{,}87 \cdot 10^{-5}$	$3{,}86 \cdot 10^{-5}$	$3{,}06 \cdot 10^{-5}$	$2{,}31 \cdot 10^{-5}$
v_B in $\frac{m}{s}$	$17{,}3 \cdot 10^3$	$13{,}7 \cdot 10^3$	$10{,}9 \cdot 10^3$	$8{,}19 \cdot 10^3$



Der Graph ist Teil einer Ursprungsgeraden, d. h.

$$v_B \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \text{ oder } v_B = k \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

1.2 Für die Kreisbewegung im Gravitationsfeld gilt:

$$\vec{F}_{Grav} = \vec{F}_{zentral}$$

$$\Rightarrow \quad G \cdot \frac{m_J \cdot m_M}{r^2} = \frac{m_M \cdot v_B^2}{r} \qquad \begin{array}{l} m_J = \text{Masse Jupiter} \\ m_M = \text{Masse Mond} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 = G \cdot m_J \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{G \cdot m} \cdot \sqrt{r} \quad \text{wobei } k = \sqrt{G \cdot m_J}$$

Lösungsmöglichkeit 2:

Mit den bisherigen Ergebnissen:

$$v_B{}^2 = k^2 \cdot \frac{1}{r_S}$$

und $$v_B = r_S \cdot \frac{2\pi}{T_S} \quad \text{bzw.} \quad v_B{}^2 = r_S{}^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_S{}^2} \quad \text{(gilt allgemein)}$$

$$\Rightarrow \quad r_S{}^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_S{}^2} = k^2 \cdot \frac{1}{r_S}$$

$$\Rightarrow \quad r_S{}^3 = \frac{k^2 \cdot T_S{}^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad r_S{}^3 = \frac{(3{,}6 \cdot 10^8)^2 \frac{m^3}{s^2} \cdot (3{,}57 \cdot 10^4\ s)^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \quad r_S = 1{,}6 \cdot 10^8\ m$$

$$\Rightarrow \quad v_S = \frac{2\pi \cdot r_S}{T_S} = \frac{2\pi \cdot 1{,}6 \cdot 10^8\ m}{3{,}57 \cdot 10^4\ s} = 28 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

Lösungsmöglichkeit 3:

Mit Angaben aus 1.0 und dem 3. Keplerschen Gesetz, z. B. mit dem Mond Io:

$$\frac{r_{Io}{}^3}{T_{Io}{}^2} = \frac{r_S{}^3}{T_S{}^2} \Rightarrow r_S$$

1.5.1 Nach 1.4.1, *Lösungsmöglichkeit 2* gilt:

$$r_1{}^3 = \frac{k^2 \cdot T_1{}^2}{4\pi^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} \cdot (2T_S)^2 = \frac{k^2}{4\pi^2} \cdot T_S{}^2 \cdot 4$$

$$\Rightarrow \quad r_1{}^3 = r_S{}^3 \cdot 4$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \sqrt[3]{4} \cdot r_S$$

1.5.2 Die Gesamtenergie ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie der Sonde. Für die potentielle Energie ist die Wahl eines Bezugsniveaus erforderlich. Legt man dieses ins Unendliche, so gilt allgemein:

$$E_{ges}(r) = E_{pot}(r) + E_{kin}(r)$$

$$E_{ges}(r) = -G \cdot m_J \cdot m_S \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot \underbrace{G \cdot m_J \cdot r}_{v^2 \text{ aus } 1.2}$$

$$E_{ges}(r) = G \cdot m_J \cdot m_S \cdot \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{r}\right)$$

$$E_{ges}(r) = -G \cdot m_J \cdot m_S \cdot \frac{1}{2r}$$

1.3 Es gilt: $$k = \frac{\Delta v_B}{\Delta \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

Aus der Graphik entnimmt man z. B.

$$\Delta v_B = 16 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{r}} = 4{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{16 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}{4{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{m}}}$$

$$\underline{k = 3{,}6 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{m^3}}{s}}$$

Nach 1.2 gilt: $k = \sqrt{m_J \cdot G}$

$$\Rightarrow \quad m_J = \frac{k^2}{G} = \frac{(3{,}6 \cdot 10^8)^2 \frac{m^3}{s^2}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}}$$

$$\underline{\Rightarrow \quad m_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg}$$

1.4.1 Es soll gelten: $T_S = T_J = 9{,}92\ h = 3{,}57 \cdot 10^4\ s = 0{,}413$ Tage
Für die weitere Durchführung sind verschiedene Lösungsansätze möglich:

Lösungsmöglichkeit 1:

Ansatz analog zu 1.2 (m_S: Sondenmasse):

$$G \cdot \frac{m_J \cdot m_S}{{r_S}^2} = m_S \cdot r_S \cdot {\omega_S}^2$$

bzw. $$G \cdot \frac{m_J \cdot m_S}{{r_S}^2} = m_S \cdot r_S \cdot \frac{4\pi^2}{{T_S}^2} \Rightarrow r_S$$