

Aufgabe 04-09

●000

Leistung: Fahren am Hang

- 1.0** Eine Zahnradbahn der Masse $5,0 \text{ t}$ befindet sich am unteren Ende einer schießen Ebene und fährt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit des Betrages $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Ebene bis zu einer Höhe von $h = 100 \text{ m}$ nach oben. Reibungsverluste werden vernachlässigt.

- 1.1** Die Ebene ist gegenüber der Horizontalen um einen Winkel von 15° geneigt. **Berechnen Sie** die Arbeit W_1 , die vom Motor der Zahnradbahn verrichtet wird, um die Höhendifferenz von 100 m zu überwinden. **Berechnen Sie** zusätzlich die dazu benötigte Zeit t_1 .

- 1.2** Die Ebene besitzt nun eine Steigung von 100% . **Berechnen Sie** die Arbeit W_2 , die vom Motor der Zahnradbahn verrichtet wird, um die Höhendifferenz von 100 m zu überwinden. **Berechnen Sie** zusätzlich die dazu benötigte Zeit t_2 .

- 1.3** **Berechnen Sie** die Leistungen P_1 und P_2 , die vom Motor der Zahnradbahn bei den beiden unterschiedlichen Steigungen verrichtet werden muss.

- 1.4** **Erläutern Sie** unter Bezugnahme auf die Ergebnisse der Teilaufgaben 1.1 bis 1.3, was der Unterschied zwischen Arbeit und Leistung ist.

Unter Prüfungsbedingungen sollten Sie diese Aufgabe in etwa 20 Minuten gelöst haben.



Musterlösung zu 04-09

- 1.0** Eine Zahnradbahn der Masse $5,0 \text{ t}$ befindet sich am unteren Ende einer schießen Ebene und fährt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit des Betrages $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ die Ebene bis zu einer Höhe von $h = 100 \text{ m}$ nach oben. Reibungsverluste werden vernachlässigt.

- 1.1** Die Ebene ist gegenüber der Horizontalen um einen Winkel von 15° geneigt. Berechnen Sie die Arbeit W_1 , die vom Motor der Zahnradbahn verrichtet wird, um die Höhendifferenz von 100 m zu überwinden. Berechnen Sie zusätzlich die dazu benötigte Zeit t_1 .

$$\text{Geg.: } \alpha_1 = 15^\circ \quad m = 5000 \text{ kg} \quad h = 100 \text{ m}$$

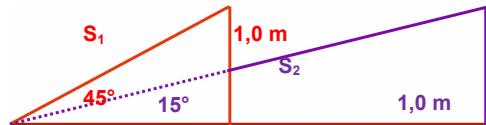
$$\text{Strecke } s \text{ der geneigten Bahn: } \sin(\alpha) = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{\sin(\alpha)} \quad (01)$$

$$\text{Bewegung mit } v = \text{const.}: v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v} \quad (02)$$

$$(1) \text{ in } (2) \rightarrow t = \frac{h}{v \sin(\alpha)} \quad (3) \rightarrow t_1 = 30,91 \text{ s} = 31 \text{ s}$$

$$W_1 = m g h \quad (4) = 4,905 \cdot 10^6 \text{ J} = 4,9 \text{ MJ}$$

Hier kann eine kleine Skizze weiterhelfen:



- 1.2** Die Ebene besitzt nun eine Steigung von 100% . Berechnen Sie die Arbeit W_2 , die vom Motor der Zahnradbahn verrichtet wird, um die Höhendifferenz von 100 m zu überwinden. Berechnen Sie zusätzlich die dazu benötigte Zeit t_2 .

$$\text{Geg.: Steigung } m = 100\% \quad m = 5000 \text{ kg} \quad h = 100 \text{ m}$$

$$m = \tan(\alpha_2) \rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$$

Die allgemeinen Lösungsgleichungen aus Teilaufgabe 1.1 werden übernommen:

$$(3): t = \frac{h}{v \sin(\alpha)} \rightarrow t_2 = 11,31 \text{ s} = 11 \text{ s}$$

$$W_2 = m g h = W_1 = 4,9 \text{ MJ}$$

- 1.3** Berechnen Sie die Leistungen P_1 und P_2 , die vom Motor der Zahnradbahn bei den beiden unterschiedlichen Steigungen verrichtet werden müssen.

Mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben 1.1 und 1.2:

$$P_1 = \frac{W_1}{t_1} = \frac{4,905 \cdot 10^6 \text{ J}}{30,91 \text{ s}} = 158687 \text{ W} = 159 \text{ kW}$$

$$P_2 = \frac{W_2}{t_2} = \frac{4,905 \cdot 10^6 \text{ J}}{11,31 \text{ s}} = 433687 \text{ W} = 434 \text{ kW}$$

- 1.4** Erläutern Sie unter Bezugnahme auf die Ergebnisse der Teilaufgaben 1.1 bis 1.3, was der Unterschied zwischen Arbeit und Leistung ist.

Bei beiden Steigungen (15° und 45°) verrichten die Motoren der Zahnradbahn die gleiche Arbeit, allerdings in unterschiedlichen Zeiten.

Als physikalisches Maß dafür, wieviel Arbeit W in einer bestimmten Zeit t verrichtet wird, definiert man die Leistung $P = \frac{W}{t}$ mit $[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ (Watt)

Je größer die Leistung ist, desto mehr Arbeit wird innerhalb einer bestimmten Zeitdauer verrichtet. Im Beispiel überwindet die Zahnradbahn mit dem leistungsstärkeren Motor (P_2) die Höhendifferenz von 100 m in einer kürzeren Zeit.