40 Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit des Betrages $v_0 = 20{,}0\,\frac{m}{s}$ vom Boden aus schräg nach oben geworfen und soll in einer horizontalen Entfernung von 20 m auf dem Boden aufprallen. Der Ortsfaktor beträgt g = 10,0 $\frac{m}{s^2}$. Die Bahngleichung für diesen Wurf lautet

$$y(x) = h + x \cdot \mathrm{Tan}(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2\,\boldsymbol{v_0}^2 \cdot \mathrm{Cos}^2(\alpha)}$$

(h: Abwurfhöhe; α: Abwurfwinkel)

40.1 Berechnen Sie den Abwurfwinkel α.

40.2 Interpretieren Sie im fachlichen Zusammehang das Ergebnis von 40.1. Fertigen Sie dazu eine geeignete Skizze der Bahnkurve des Balles an.

Unter Prüfungsbedingungen sollten Sie diese Aufgabe in etwa 20 Minuten gelöst haben.

Musterlösung zu 01-40

40 Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit des Betrages $\boldsymbol{v_0 = 20{,}0\,\frac{m}{s}}$ vom Boden aus schräg nach oben geworfen und soll in einer **horizontalen Entfernung von 20 m** auf dem Boden aufprallen. Der Ortsfaktor beträgt $\mathbf{g = 10{,}0\,\frac{m}{s^2}}$. Die Bahngleichung für diesen Wurf lautet

$$y(x) = h + x \cdot \mathrm{Tan}(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2\,v_0{}^2 \cdot \mathrm{Cos}^2(\alpha)}$$

(h: Abwurfhöhe; α: Abwurfwinkel)

40.1 **Berechnen Sie** den **Abwurfwinkel α**.

40.2 **Interpretieren Sie im fachlichen Zusammenhang** das Ergebnis von 39.1. Fertigen Sie dazu eine **geeignete Skizze der Bahnkurve** des Balles an.

40.1

Geg.: $v_0 = 20{,}0\,\frac{m}{s}$ $h = 0$ $g = 10{,}0\,\frac{m}{s^2}$ $x_{auf} = 20\,m$

Ges: α

Denken Sie beim Lösen physikalischer Gleichungen immer daran:
Es kann für die gesuchte Größe – hier α – mehr als eine Lösungen geben !

$y(x) = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0{}^2 \cdot Cos^2(\alpha)} + x \cdot Tan(\alpha) = 0$ ***Substitution 1:*** $A = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0{}^2{}^2}$ $x = x_{auf}$

$\frac{A}{Cos^2(\alpha)} + x_{auf} \cdot Tan(\alpha) = 0$ | $\cdot Cos[\alpha]^2$

$A + x_{auf} \cdot Cos(\alpha) \cdot Sin(\alpha) = 0$ | $-A$

$x_{auf} \cdot Cos(\alpha) \cdot Sin(\alpha) = -A$ | $(\,)^2$

$x_{auf}{}^2 \cdot Cos^2(\alpha) \cdot Sin^2(\alpha) = A^2$ $Cos[\alpha]^2 = 1 - Sin[\alpha]^2$

$x_{auf}{}^2 \cdot Sin^2(\alpha) \cdot [1 - Sin^2(\alpha)] = A^2$ *Klammer auflösen*

$x_{auf}{}^2 \cdot Sin(\alpha)^2 - xx_{auf}{}^2 \cdot Sin^2(\alpha) = A^2$ ***Substitution 2:*** $Sin^2(\alpha) \rightarrow u$

$u\,x_{auf}{}^2 - u^2 x_{auf}{}^2 = A^2$ | ***MNF** nach u auflösen*

$u_{1,2} = \frac{x_{auf}{}^2 \pm \sqrt{x_{auf}{}^4 - 4A^2 x_{auf}{}^2}}{2x_{auf}}$

Resubstitution 1: $A = \frac{g \cdot x_{auf}}{2v_0{}^2{}^2}$

Resubstitution 2: $Sin(\alpha) = (\cancel{\pm})\sqrt{u}$

Nur positive Winkel sinnvoll → „–“-Zeichen nicht weiter berücksichtigen

$$Sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 x_{auf}{}^2}{v_0{}^4}}}{2}} \rightarrow \alpha_{1,2} = ArcSin\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 x_{auf}{}^2}{v_0{}^4}}}{2}} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1 = 15°} & \textbf{Flacher Wurf} \\ \boldsymbol{\alpha_2 = 75°} & \textbf{Steiler Wurf} \end{cases}$$

MNF → 2 Lösungen („ ± “)

40.2

*Um bei einer Abwurfgeschwindigkeit des Betrages $v_0 = 20{,}0\,\frac{m}{s}$ eine Wurfweite von 20 m zu erzielen, sind zwei Abwurfwinkel **α₁= 15°** (**flacher Wurf**) und **α₂ =75°** (**steiler Wurf**) möglich.*