38 Die Flugbahn einer ballistischen Rakete wird durch die Gleichung eines schrägen Wurfes beschrieben. Eine solche ballistische Rakete wird zum Zeitpunkt t = 0 abgeschossen. Der Abschusswinkel der Rakete beträgt $\alpha_1 = 75{,}0°$, der Betrag der Abschussgeschwindigkeit $500\ \frac{m}{s}$. Diese Rakete soll mit Hilfe einer Drohne abgefangen werden. Diese Drohne bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geradlinigen Bahn unter einem Winkel von $\alpha_2 = 45{,}0°$ gegenüber der Horizontalen. Der Abschussort der Drohne legt 3,00 km vom Abschussort der Rakete entfernt zwischen dem Abschussort und dem geplanten Aufprallort der Rakete. Bei allen Berechnungen sind keine allgemeinen Gleichungen erforderlich.

38.1 Die Raketen und die Drohne werden zum gleichen Zeitpunkt abgeschossen. Berechnen Sie den Betrag v_{20} der Drohne, damit diese die Rakete abfangen kann.

Unter Prüfungsbedingungen sollten Sie diese Aufgabe in etwa 25 Minuten gelöst haben.

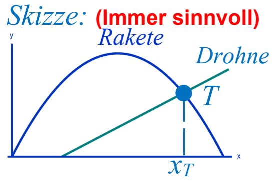
38.2 Die Abschussgeschwindigkeit einer anderen Drohne besitzt den Betrag $v_{20} = 250\,\frac{m}{s}$. Um die Rakete abfangen zu können, muss diese Drohne zeitlich verzögert abgeschossen werden. Berechnen Sie den Zeitabstand t_{20} zwischen dem Abschuss der Rakete und dem Abschuss der Drohne.

Musterlösung zu 01-38

38 Die Flugbahn einer ballistischen Rakete wird durch die Gleichung eines **schrägen Wurfes** beschrieben. Eine solche ballistische Rakete wird zum Zeitpunkt t = 0 abgeschossen. Der Abschusswinkel der Rakete beträgt **$\alpha_1 = 75{,}0°$**, der Betrag der Abschussgeschwindigkeit 500 $\frac{m}{s}$. Diese Rakete soll mit Hilfe einer Drohne abgefangen werden. Diese Drohne bewegt sich mit **konstanter Geschwindigkeit** entlang einer geradlinigen Bahn unter einem Winkel von **$\alpha_2 = 45{,}0°$** gegenüber der Horizontalen. Der Abschussort der Drohne legt **3,00 km** vom Abschussort der Rakete entfernt zwischen dem Abschussort und dem geplanten Aufprallort der Rakete. Bei allen Berechnungen sind **keine allgemeinen Gleichungen** erforderlich.

38.1 Die Raketen und die Drohne werden zum **gleichen Zeitpunkt** abgeschossen. **Berechnen Sie** den **Betrag v_{20}** der Drohne, **damit diese die Rakete abfangen kann**.

Skizze: **(Immer sinnvoll)**



Geg.: $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\alpha_1 = 75{,}0°$ $\quad x_{10} = 0$ $\quad v_{10} = 500\,\frac{m}{s}$ $\quad$ *Rakete*

$\alpha_2 = 45{,}0°$ $\quad x_{20} = 3000\,m$ $\quad$ *Drohne*

Ges.: v_{20}

Ansatz:

$$x_1(t) = v_{10}\,\mathrm{Cos}(\alpha_1)\cdot t \qquad \rightarrow y_1(x) = x\,Tan(\alpha_1) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{10}^2\cdot Cos^2(\alpha_1)}\,x^2$$

$$y_1(t) = v_{10}\,\mathrm{Sin}(\alpha_1)\cdot t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad \rightarrow y_1(x) = \boldsymbol{3{,}7321\,x - 0{,}00029289\,\frac{1}{m}\,x^2}$$

$$x_2(t) = x_{20} + v_{20}\,\mathrm{Cos}(\alpha_2)\cdot t \qquad \rightarrow y_2(x) = (x - x_{20})\,\mathrm{Tan}(\alpha_2)$$

$$y_2(t) = v_{20}\,\mathrm{Sin}(\alpha_2)\cdot t \qquad = \boldsymbol{x - 3000\,m}$$

$y_1(x) = y_2(x)$ *Schnittpunkt beider Bahnkurven*

$$3{,}7321\,x - 0{,}00029289\,\frac{1}{m}\,x^2 = x - 3000\,m \qquad \rightarrow x_{T1} = -\ 992{,}478\ m \qquad \rightarrow \boldsymbol{x_{T2} = 10320{,}342\,m = x_T}$$

Die beiden Bahnkurven schneiden sich an der Stelle $x_{T2} =$ 10320,342 m.

*Jetzt muss noch berechnet werden, wie schnell sich die Drohne bewegen muss, damit sie zum **gleichen Zeitpunkt** den Treffpunkt T erreicht wie die Rakete:*

$$x_1(t) = x_T = 500\,\frac{m}{s}\ Cos(75°)\cdot t \qquad \rightarrow t = t_{T1} = 79{,}749\,s$$

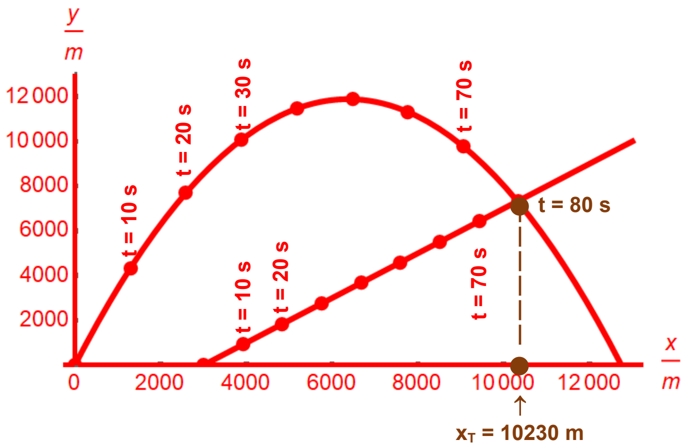
$$x_2(t) = x_T = 3000\,m + v_{20}\,\mathrm{Cos}(45°)\cdot t \qquad \rightarrow t = t_{T2} = \frac{10352{,}46\,m}{v_{20}}$$

Rakete und Drohne treffen sich nur dann am Treffpunkt T, wenn

$$t_{T1} = 79{,}749\,s = \frac{10352{,}46\,m}{v_{20}} = t_{T2} \rightarrow v_{20} = 129{,}813\,\frac{m}{s} = \boxed{\boldsymbol{130\ \frac{m}{s}}}$$

Rechnen Sie hier mit eingesetzten Werten weiter – die Gleichungen werden sonst zu unübersichtlich

Graphische Überprüfung der Ergebnisse (in Aufgabenstellung **nicht** gefragt):



Die Punkte auf den Kurven geben Zeitpunkte (in s) an, zu denen sich die Rakete bzw. die Drohne an den betreffenden Ortspunkten befindet.

38.2 Die Abschussgeschwindigkeit einer anderen Drohne besitzt den Betrag **$v_{20} = 250\ \frac{m}{s}$**. Um die Rakete abfangen zu können, muss diese Drohne **zeitlich verzögert** abgeschossen werden. **Berechnen Sie** den **Zeitabstand t_{20}** zwischen dem Abschuss der Rakete und dem Abschuss der Drohne.

Geg.: $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

$\alpha_1 = 75{,}0°$ $x_{10} = 0$ $v_{10} = 500\ \frac{m}{s}$ *Rakete*

$\alpha_2 = 45{,}0°$ $x_{20} = 3000\ m$ $v_{20} = 250\ \frac{m}{s}$ *Drohne*

Ges.: Δt_{20}

Ansatz: *Die beiden Bahnkurven schneiden sich – wie bereits in Teilaufgabe 38.1 – an der Stelle $x_{T2} = 10320{,}342\ m$.*

*Jetzt muss (nur) noch berechnet werden, zu welchem Zeitpunkt t_{20} die Drohne gestartet werden muss, damit sie zum **gleichen Zeitpunkt** den Treffpunkt T erreicht wie die Rakete:*

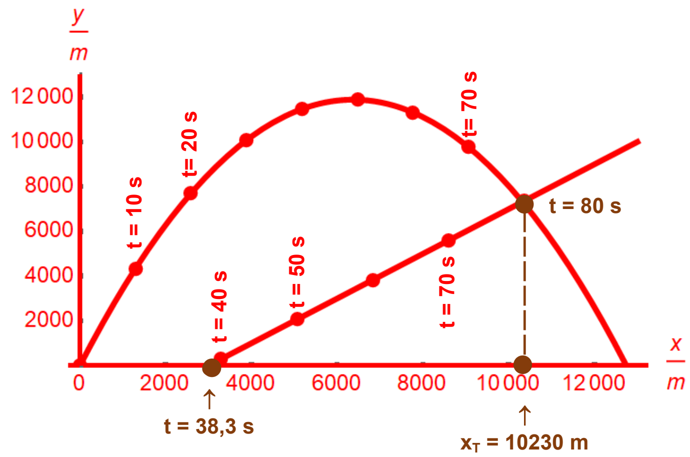
$$x_1(t) = x_T = 500\ \frac{m}{s}\ Cos(75°) \cdot t \quad \rightarrow t = t_{T1} = 79{,}749\ s$$

$$x_2(t) = x_T = 3000\ m + 250\ \frac{m}{s}\ \mathrm{Cos}(45°) \cdot (t - t_{20}) \rightarrow t = t_{T2} = 41{,}410\ s + t_{20}$$

Rakete und Drohne treffen sich nur dann am Treffpunkt T, wenn

$$t_{T1} = 79{,}749\ s = 41{,}410\ s + t_{20} = t_{T2} \rightarrow t_{20} = 38{,}339\ s = \mathbf{38{,}3\ s}$$

Graphische Überprüfung der Ergebnisse (in Aufgabenstellung **nicht** gefragt):



Die Punkte auf den Kurven geben Zeitpunkte (in s) an, zu denen sich die Rakete bzw. die Drohne an den betreffenden Ortspunkten befindet.