

1-09

Ableitungen
von Polynomen

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis VII) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst (soweit vorhanden) mit der **hervorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. **Rot** hervorgehobene Aufgaben sind besonders „sportlich“ und müssen **nicht unbedingt** bearbeitet werden. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die **Lösungen** zu den Aufgaben. **Fachliche Hilfe** finden Sie auf Seite 3.

I [ABLEITUNG VON FUNKTIONEN – 1] Berechnen Sie die 1. und die 2. Ableitungen der Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen ($x, a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$):

1.1 $f_{11}(x) = 5x^2 - 4x + 2$

1.2 $f_{12}(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x$

1.3 $f_{13}(x) = a x^3 - 2x^2 + 2x$

1.4 $f_{14}(x) = n x^3 - 2 n x^2 + 2x$

1.5 $f_{15}(x) = -2 a x^2 + 3x^n + 2n$

1.6 $f_{16}(x) = -2a^3 + a n x^n + 2a x$

II [ABLEITUNG VON FUNKTIONEN – 2] Berechnen Sie die 1. Ableitungen der Funktionen mit den folgenden Funktionsgleichungen ($x, a \in \mathbb{R}$):

2.1 $f_{21}(x) = x(x + 2)$

2.2 $f_{22}(x) = (x - 2)(x + 2)$

2.3 $f_{23}(x) = (x - 2)(x + 3)$

2.4 $f_{24}(x) = x(x + 1)(x + 2)$

2.5 $f_{25}(x) = a(x + 1)(x + 2)$

2.6 $f_{26}(x) = a(x + 1)(a + x)$

III [HÖHERE ABLEITUNGEN] Berechnen Sie die jeweils angegebene Ableitung folgender Funktionen ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$):

3.1 $f_{31}(x) = x^3 \rightarrow f_{31}^{(3)}(x) =$

3.2 $f_{32}(x) = x^6 \rightarrow f_{32}^{(6)}(x) =$

3.3 $f_{33}(x) = x^6 + x^3 \rightarrow f_{33}^{(6)}(x) =$

3.4 $f_{34}(x) = x^n \rightarrow f_{34}^{(n)}(x) =$

IV [GLEICHUNGEN MIT ABLEITUNGEN] Lösen Sie folgende Gleichungen (unterstrichen) nach x auf:

4.1 $f_{41}(x) = x(x + 2)$
 $f_{41}'(x) = 2$ $\rightarrow x =$

4.2 $f_{42}(x) = (x + 1)(x + 2)$
 $f_{42}'(x) = 2$ $\rightarrow x =$

4.3 $f_{43}(x) = (x + 2)(x^2 + 3)$
 $f_{43}'(x) = 2$ $\rightarrow x =$

4.4 $f_{44}(x) = (x - 1)x(x + 4)$
 $f_{44}'(x) = 2$ $\rightarrow x =$

4.5 $f_{45}(x) = (x - 1)x(x + 2)$
 $f_{45}'(x) = 2x^2$ $\rightarrow x =$

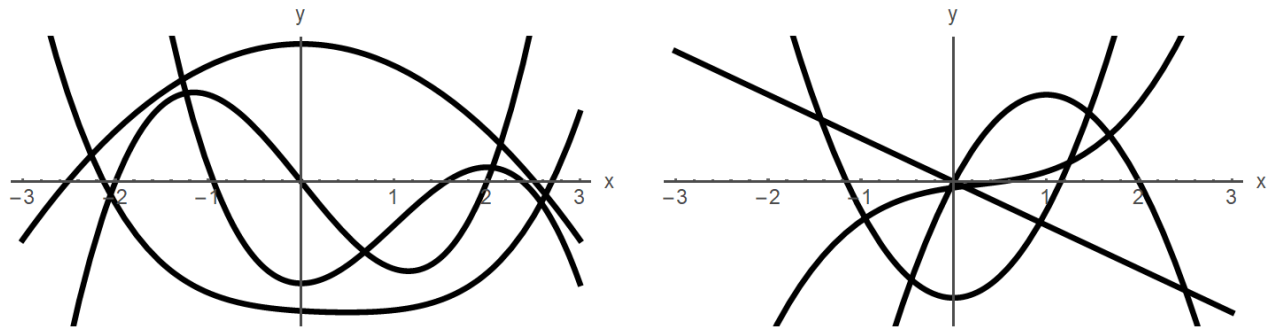
4.6 $f_{46}(x) = (x - 2)(x + 4)$
 $f_{46}'(x) = f_{46}(x)$ $\rightarrow x =$

A

V [ZEICHNEN VON GRAPHEN ABGELEITETER FUNKTIONEN] Zeichnen Sie die Graphen der 1. Ableitungsfunktionen zu den folgenden Funktionsgleichungen für das jeweils angegebene Intervall:

5.1 $f_{51}(x) = x^2 + x - 2$ $-3 \leq x \leq 2$
5.2 $f_{52}(x) = x^3(x + 2)$ $-2 \leq x \leq 1$
5.3 $f_{53}(x) = x(x + 2)^2(x^2 - 2)$ $-2 \leq x \leq 1$

VI [ZUORDNEN VON GRAPHEN VON FUNKTIONEN UND DEREN ABLEITUNGEN] In der Abbildung unten links sind die Graphen vierer Funktionen f_{61} bis f_{64} wiedergegeben. In der Abbildung unten rechts sind die entsprechenden Graphen der **abgeleiteten** Funktionen f_{61}' bis f_{64}' dargestellt:



Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f_{61} bis f_{64} (**links**) die entsprechenden Graphen der Ableitungsfunktionen f_{61}' bis f_{64}' (**rechts**) zu¹.

¹Markieren Sie die Zuordnungen durch Buchstaben oder durch Farben.

VII [TANGENTENGLICHUNGEN] Berechnen Sie für die Funktionen f_{71} bis f_{74} und den entsprechenden Punkten P_1 bis P_4 die Tangentengleichungen:

7.1 $f_{71}(x) = 5x^2 + 2x$
 $P_1(-3 | 39)$

7.2 $f_{72}(x) = 15x^3 + 30x^2 - 15x$
 $P_2(1 | 30)$

7.3 $f_{73}(x) = 20x^3 - 60x^2 + 40$
 $P_3(2 | -40)$

7.4 $f_{74}(x) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$
 $P_4(0 | 24)$

Tragen Sie die Graphen $G_{f_{71}}$ bis $G_{f_{74}}$, die Punkte P_1 bis P_4 und die jeweiligen Tangenten in ein x - y -Diagramm ein.

Allgemeine Hinweise zu Ableitungen von Polynomen

Ableitungsregeln für Polynome

- (1) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ **Potenzregel**
- (2) $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ $a \in \mathbb{R}$ **Konstantenregel**
- (3) $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$ $c \in \mathbb{R} = \text{const.}$
- Begründung: $f(x) = c = c \cdot 1 = c \cdot x^0 \rightarrow f'(x) = c \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$
- (4) $f(x) = x^n + x^m \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} + m \cdot x^{m-1}$ $m \in \mathbb{R}$ **Summenregel**

Ableitung der Grundfunktionen	$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$ Potenzregel
Ableitungsregeln	$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ Summenregel $f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$ Konstantenregel

Merkhilfe Mathe

$\frac{d}{dx}(x^r)$: andere Schreibweise für $(x^r)'$ mit $x, r \in \mathbb{R}$

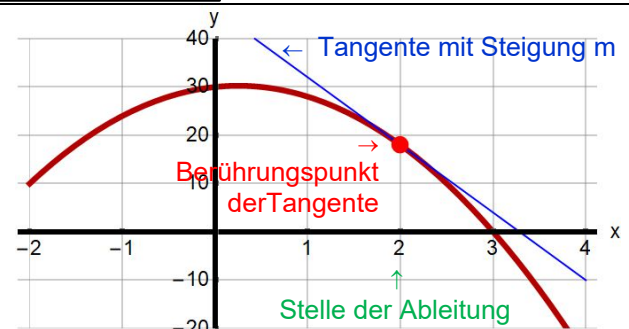
Bei Polynomen: $r \rightarrow n \in \mathbb{N}$

Ableitung und Tangente

$f(x) = -4x^2 + 2x + 30 \rightarrow f'(x) = -8x + 2$

Berührungspunkt bei $P(2 | 18)$

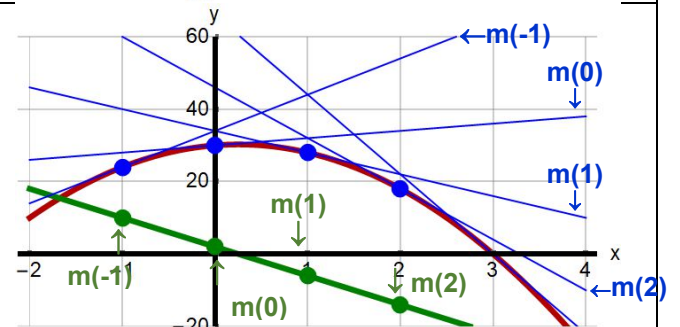
Tangentensteigung $m = f'(2) = -14$



Graphen von Ableitungen

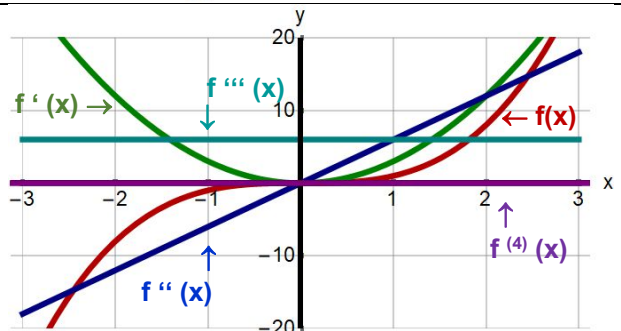
- $f(x) = -4x^2 + 2x + 30$
- Bestimmung der Tangentensteigungen $m(x) = f'(x)$ (Tabelle)
- Auftragung der Steigungen $m(x)$ in das Koordinatensystem (●)
- Durchziehen einer **Kurve** (hier: Geraden —) durch die Punkte (●)
- Kurve**: Graph der Ableitungsfunktion mit $f'(x) = -8x + 2$

x	f'(x)
-1	10
0	2
1	-6
2	-14



Höhere Ableitungen

- $f(x) = x^3$ **Kubische Kurve** \rightarrow
- $f'(x) = 3x^2$ **Parabel** \rightarrow
- $f''(x) = 6x$ **Schräge Gerade** \rightarrow
- $f'''(x) = 6$ **Horizontale Gerade** \rightarrow
- $f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) = 0$ **Nullgerade**



Tangentengleichungen

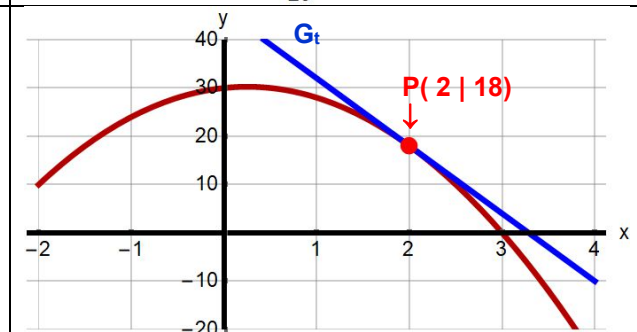
Punkt-Steigungs-Form einer Geraden: $y(x) = m(x - x_0) + y_0$

$f(x) = -4x^2 + 2x + 30$

$P(2 | f(2)) = P(2 | 18)$

$f'(x) = -8x + 2 \rightarrow f'(2) = m = -14$

$t(x) = -14(x - 2) + 18 = -14x + 46$



Lösungen

I 1.1 $f_{11}'(x) = 10x - 4$ $f_{11}''(x) = 10$

1.2 $f_{12}'(x) = 15x^2 - 8x + 2$ $f_{12}''(x) = 30x - 8$

1.3 $f_{13}'(x) = 3ax^2 - 4x + 2$ $f_{13}''(x) = 6ax - 4$

1.4 $f_{14}'(x) = 3nx^2 - 4nx + 2$ $f_{14}''(x) = 6nx - 4n$

1.5 $f_{15}'(x) = 3nx^{n-1} - 4ax$
 $f_{15}''(x) = 3(n-1)nx^{n-2} - 4a$

1.5 $f_{16}'(x) = an^2x^{n-1} + 2a$
 $f_{16}''(x) = a(n-1)n^2x^{n-2}$

II 2.1 $f_{21}'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2$

2.2 $f_{22}'(x) = (x^2 - 4)' = 2x$

2.3 $f_{23}'(x) = (x^2 + x - 6)' = 2x + 1$

2.4 $f_{24}'(x) = (x^3 + 3x^2 + 2x)' = 3x^2 + 6x + 2$

2.5 $f_{25}'(x) = (ax^2 + 3ax + 2a)' = 2ax + 3a$

2.6 $f_{26}'(x) = (a^2x + a^2 + ax^2 + ax)' = a^2 + 2ax + a$

III 3.1 $f_{31}^{(3)}(x) = 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

3.2 $f_{32}^{(6)}(x) = 720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

3.3 $f_{33}^{(6)}(x) = 720$

3.4 $f_{34}^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$

IV 4.1 $2x + 2 = 2 \rightarrow x = 0$

4.2 $2x + 3 = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

4.3 $3x^2 + 4x + 3 = 2 \rightarrow x_{1,2} = \{-1, -\frac{1}{3}\}$

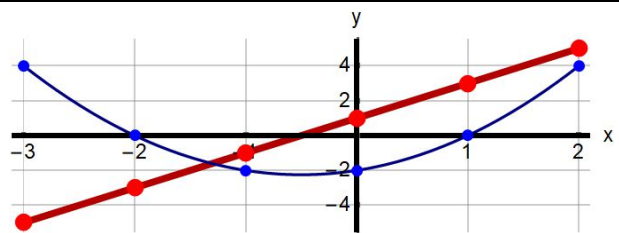
4.4 $3x^2 + 6x - 4 = 2 \rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$

4.5 $3x^2 + 2x - 2 = 2x^2 \rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$

4.6 $2x + 2 = x^2 + 2x - 8 \rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{10}$

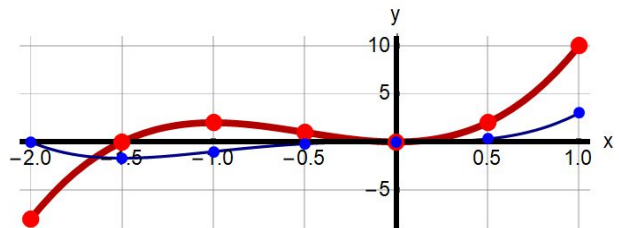
V 5.1 $f_{51}(x) = x^2 + x - 2$

$f_{51}'(x) = 2x + 1$



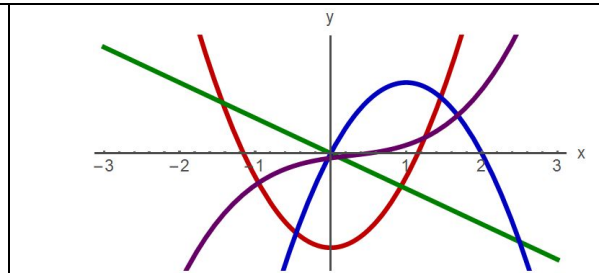
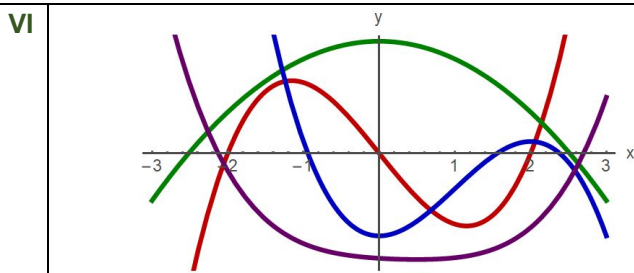
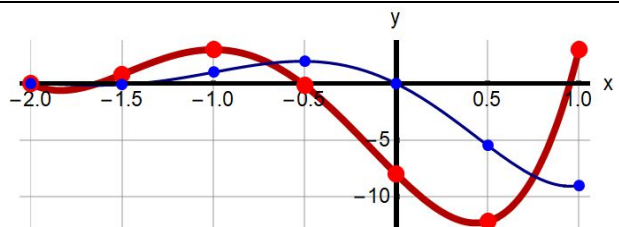
5.2 $f_{52}(x) = x^4 + 2x^3$

$f_{52}'(x) = 4x^3 + 6x^2$



5.3 $f_{53}(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x$

$f_{53}'(x) = 5x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 16x - 8$



VII 5.1 $t_{71}(x) = -28x - 45$

5.2 $t_{72}(x) = 90x - 60$

5.3 $t_{73}(x) = -40$

5.4 $t_{74}(x) = 4x + 24$

