1-03 Nullstellensuche bei Polynomen – Polynomdivision

Aufgaben

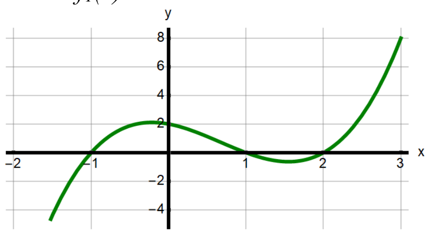
Bestimmen Sie von den folgenden Funktionsgleichungen **alle** Nullstellen durch **Polynomdivision** (Lösen Sie **auch quadratische Gleichungen** mit **Polynomdivision**, **nicht** mit der Mitternachtsformel !). Wenden Sie im Bedarfsfall weitere „**algebraische Tricks**“ an, um den Lösungsweg zu vereinfachen. Geben Sie von allen Nullstellen deren **Vielfachheit** an.
Wenn Sie nicht „weiter wissen“, sehen Sie sich auf Seite 2 dieses Arbeitsbogens die graphischen Hinweise (Funktions-Graphen) zu den Aufgaben an.
Die Lösungen finden Sie auf den letzten beiden Seiten.

	Funktionsgleichung	Hinweise auf Nullstellen		
1	$f_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$	$x_1 = 1$	x_2: Raten	Mit ausführlicher Musterlösung
2	$f_2(x) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	
3	$f_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$x_1 = 1$	x_2: Raten	
4	$f_4(x) = x^3 - 8{,}5x^2 + 23{,}5x - 21$	$x_1 = 3$	$x_2 = 2$	
5	$f_5(x) = x^4 - 19x^3 + 113x^2 - 221x + 126$	$x_1 = 1$	$x_2 = 7$	$x_3 = 9$
6	$f_6(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	x_3: Raten
7	$f_7(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	x_1: Erkennen	x_2: Raten	
8	$f_8(x) = x^4 - 10x^3 + 16x^2$	x_1: Erkennen	x_2: Erkennen	$x_3 = 8$
9	$f_9(x) = x^4 - 5x^2 + 4$	Vereinfachen Sie das Rechnen, indem Sie eine bestimmte Eigenschaft dieser Funktion erkennen und sich diese zunutze machen. Notwendige Nullstellen erraten Sie.		
10	$f_{10}(x) = x^4 - 8x^2 + 16$	Vereinfachen sich das Rechnen, indem Sie eine bestimmte Eigenschaft dieser Funktion erkennen und sich diese zunutze machen. Notwendige Nullstellen erraten Sie.		
11	$f_{11}(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$	Vereinfachen Sie das Rechnen, indem Sie eine bestimmte Eigenschaft dieser Funktion erkennen und sich diese zunutze machen. Notwendige Nullstellen erraten Sie.		
12	$f_{12}(x) = x^7 - 8x^5 + 16x^3$	Vereinfachen Sie das Rechnen, indem Sie mehrere bestimmte Eigenschaft dieser Funktion erkennen und sich diese zunutze machen. Notwendige Nullstellen erraten Sie.		
13	$f_{13}(x) = x^2 - ax - bx + ab$	Polynomdivision bei einer parametrischen quadratischen Funktion		

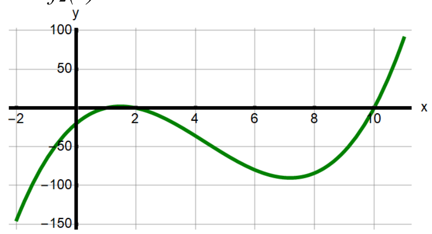
Graphische Lösungshinweise

Der Darstellung eines Funktionsgraphens können Sie eventuell wichtige Eigenschaften der Funktion entnehmen, die bei der **rechnerischen** Suche nach den Nullstellen helfen können:

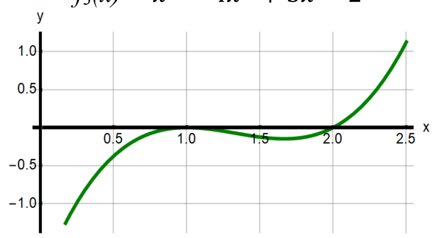
1 $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



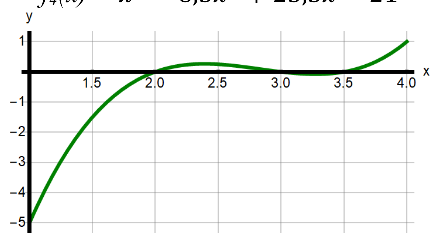
2 $f_2(x) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$



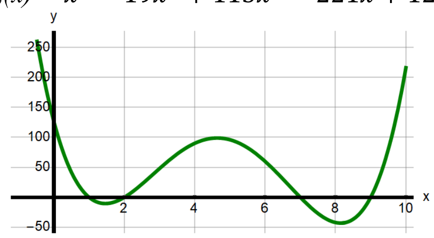
3 $f_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$



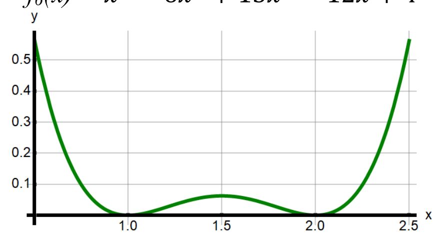
4 $f_4(x) = x^3 - 8{,}5x^2 + 23{,}5x - 21$



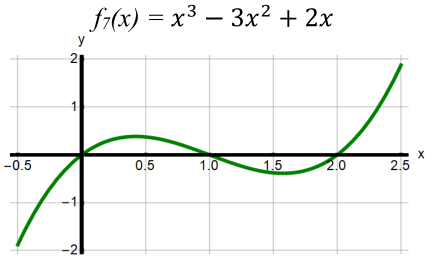
5 $f_5(x) = x^4 - 19x^3 + 113x^2 - 221x + 126$



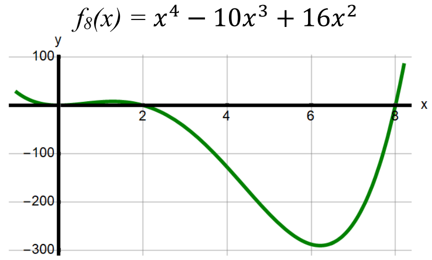
6 $f_6(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$



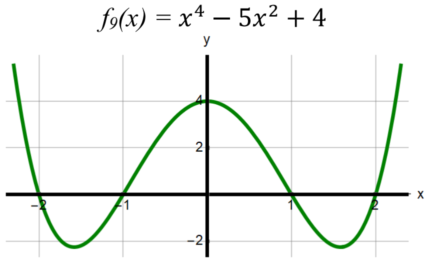
7 $f_7(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$



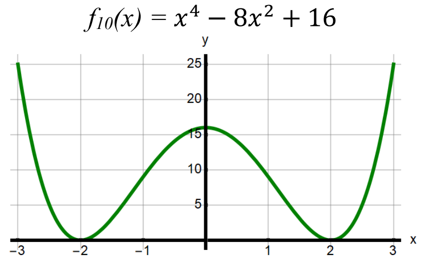
8 $f_8(x) = x^4 - 10x^3 + 16x^2$



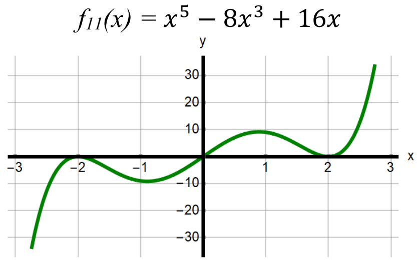
9 $f_9(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



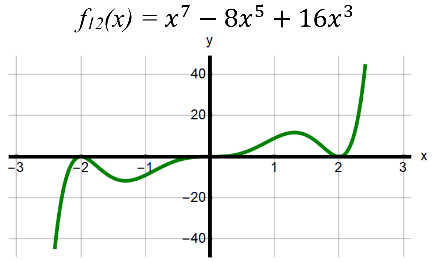
10 $f_{10}(x) = x^4 - 8x^2 + 16$



11 $f_{11}(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$



12 $f_{12}(x) = x^7 - 8x^5 + 16x^3$



13 Zu Aufgabe 13 ist wegen des Auftretens der Parameter **kein** graphischer Lösungshinweis möglich.

Lösungen

Vielfachheit der Nullstellen:

1 $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

x_1 ↓ 1. Schritt ↓ 2. Schritt ↓ 3. Schritt ↓

$(x^3 - 2x^2 - x + 2) \div (x - 1) = x^2 - x - 2$ $\qquad (x-1)\,x^2 = \underbrace{(x^3 - x^2)}$

1. Schritt $\quad -(x^3 - x^2)$

$\quad -x^2 - x$ $\qquad -(x-1)\,x = \underbrace{(-x^2 + x)}$

2. Schritt $\quad -(-x^2 + x)$

$\quad -2x + 2$ $\qquad -(x-1)\,2 = \underbrace{(-2x + 2)}$

3. Schritt $\quad -(-2x + 2)$

Rest $\quad$ **0** $\qquad$ $x_1 = 1$

$(x^2 - x - 2) \div (x + 1) = x - 2$

$-(x^2 + x)$

$\quad -2x - 2$

$\quad -(-2x - 2)$

$\quad$ **0** $\qquad$ $x_2 = -1$

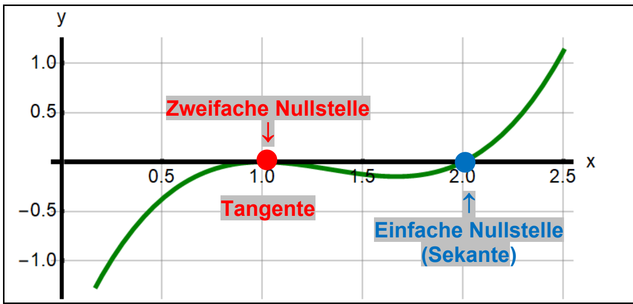
$x - 2 = 0 \rightarrow$ $\qquad$ $x_3 = 2$

$I\!L$: **Lösungsmenge** → $I\!L = \{-1|1|2\}$

---

2 $f_2(x) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$ $\qquad I\!L = \{1|\ 2|\ \mathbf{10}\}$ $\qquad$ 10 ist eine **ein**fache Nullstelle

3 $f_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ $\qquad I\!L = \{\mathbf{1}|\ \mathbf{1}|\ 2\}$ $\qquad$ 1 ist eine **zwei**fache Nullstelle



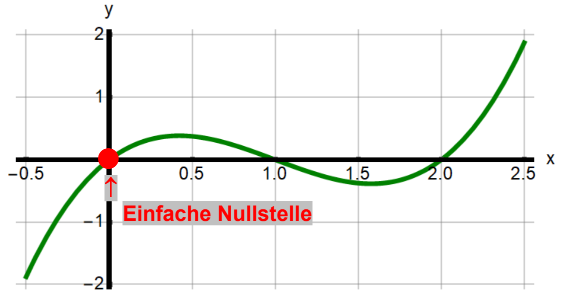
Zweifache Nullstelle bei **x=1**: Der Graph $G_{f,3}$ berührt (tangiert) die x-Achse an der Stelle **x=1**.

4 $f_4(x) = x^3 - 8{,}5x^2 + 23{,}5x - 21$ $\qquad I\!L = \{2|\ 3\ |\ 3{,}5\}$

5 $f_5(x) = x^4 - 19x^3 + 113x^2 - 221x + 126$ $\qquad I\!L = \{1|\ 2|\ 7|\ 9\}$

6 $f_6(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ $\qquad I\!L = \{1|\ 1|\ 2|\ 2\}$

7 $f_7(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$ $\mathbb{L} = \{0 | 1 | 2\}$

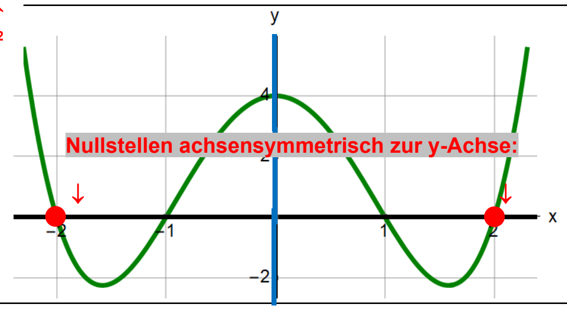


Einfache Nullstelle bei $x=0$

8 $f_8(x) = x^4 - 10x^3 + 16x^2 = x^2(x^2 - 10x + 16)$ $\mathbb{L} = \{0 | 0 | 2 | 8\}$

9 $f_9(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = u^2 - 5u + 4$ $\mathbb{L} = \{-2 | -1 | 1 | 2\}$

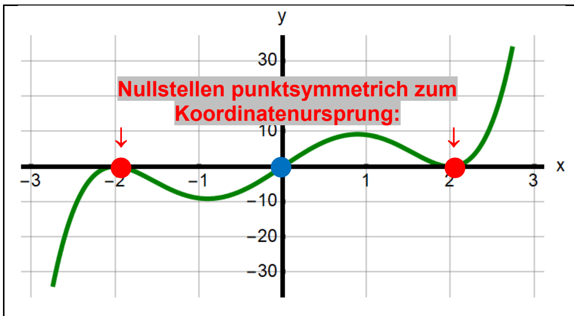
$u := x^2$



Graph $G_{f,9}$ verhält sich **achsensymmetrisch** zu y-Achse → Nullstellen auch symmetrisch zur **y-Achse** angeordnet ($x_1 = -2 \rightarrow x_4 = +2$)

10 $f_{10}(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ $\mathbb{L} = \{-2 | -2 | 2 | 2\}$

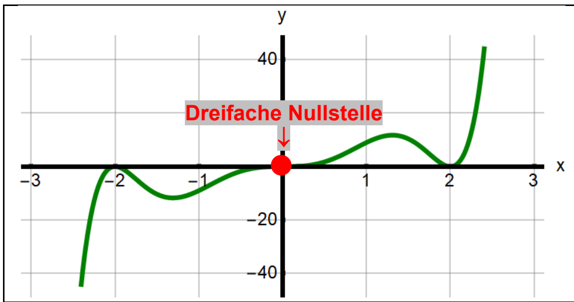
11 $f_{11}(x) = x^5 - 8x^3 + 16x = x(x^4 - 8x^2 + 16)$ $\mathbb{L} = \{-2 | -2 | 0 | 2 | 2\}$



Graph $G_{f,11}$ verhält sich **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung → Nullstellen auch symmetrisch zum **Koordinatenursprung** angeordnet ($x_1 = -2 \rightarrow x_4 = +2$)

12 $f_{12}(x) = x^7 - 8x^5 + 16x^3 = x^3(x^4 - 8x^2 + 16)$ $\mathbb{L} = \{-2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2\}$

0 ist eine **drei**fache Nullstelle



Graph $G_{f,12}$ verhält sich **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung und **drei**fache Nullstelle bei $x=0$

13 $f_{13}(x) = x^2 - ax - bx + ab$ $\mathbb{L} = \{a | b\}$

$$(x^2 - ax - bx + ab) \div (x - a) = x - b$$

1. Schritt $-\underbrace{(x^2 - ax)}_{\text{Rest 0}}$

$$-bx + ab$$

2. Schritt $-\underbrace{(-bx + ab)}_{\text{Rest 0}}$