1-02 Nullstellensuche bei Polynomen – Substitution

Aufgaben

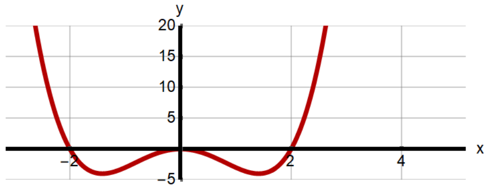
Bestimmen Sie von den folgenden Funktionsgleichungen **alle** Nullstellen durch **Substitution** Wenden Sie im Bedarfsfall weitere „**algebraische Tricks**“ an, um den Lösungsweg zu vereinfachen. Geben Sie von allen Nullstellen deren **Vielfachheit** an.
Wenn Sie nicht „weiter wissen“, sehen Sie sich auf Seite 2 dieses Arbeitsbogens die graphischen Hinweise (Funktions-Graphen) zu den Aufgaben an.
Die Lösungen finden Sie auf den letzten beiden Seiten.

	Ganzrationale Gleichung (Polynom-Gleichung)	
1	$x^4 - 4x^2 = 0$	Mit ausführlicher Musterlösung
2	$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$	
3	$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$	Mit ausführlicher Musterlösung
4	$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	
5	$x^4 + 2x^2 - 4 = 0$	
6	$x^6 + 5x^4 + 4x^2 = 0$	
	Die folgenden vier Aufgaben sind etwas anspruchsvoller:	
7	$1 + 2\sqrt{x} - 3x = 0$	Mit ausführlicher Musterlösung
8	$10^x + (10^x)^2 - 0{,}5 = 0$	
9	$x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16 = 0$	
10	$x^2 + \sqrt{x} = 0$	
	Die folgenden beiden Aufgaben sind nur von Schülern der 13. Techniker-Klassen zu bearbeiten !	
11	$-0{,}5 + \sqrt{\mathrm{Sin}[x]} + \mathrm{Sin}[x] = 0$	Mit ausführlicher Musterlösung
12	$0{,}5 + \sqrt{\mathrm{Sin}[x]} + \mathrm{Sin}[x] = 0$	

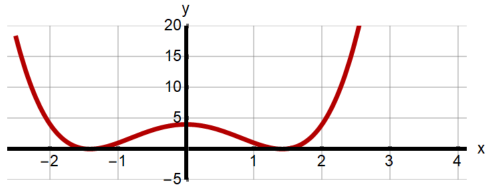
Graphische Lösungshinweise:

Der Darstellung eines Funktionsgraphens können Sie eventuell wichtige Eigenschaften der Funktion entnehmen, die bei der **rechnerischen** Suche nach den Nullstellen helfen können:

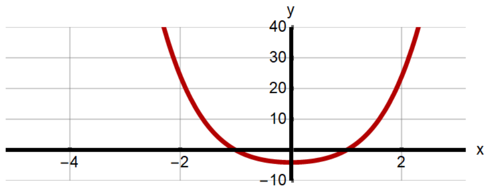
1 $x^4 - 4x^2 = 0$



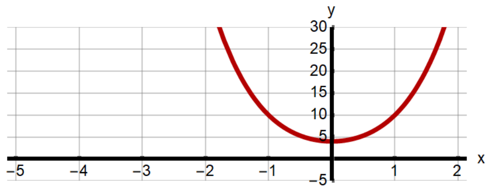
2 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$



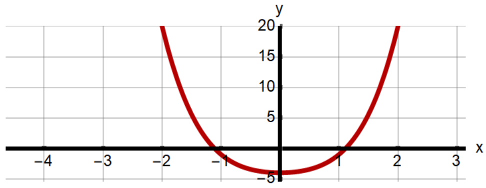
3 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$



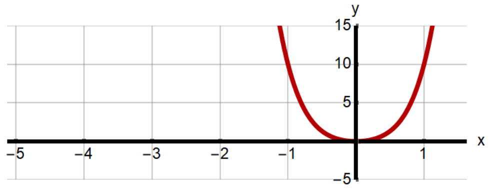
4 $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$



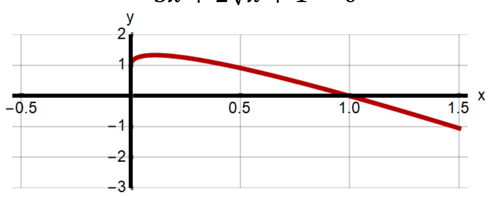
5 $x^4 + 2x^2 - 4 = 0$



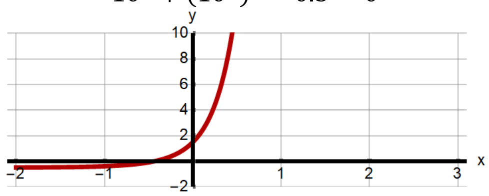
6 $x^6 + 5x^4 + 4x^2 = 0$



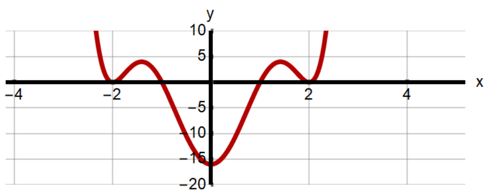
7 $-3x + 2\sqrt{x} + 1 = 0$



8 $10^x + (10^x)^2 - 0.5 = 0$

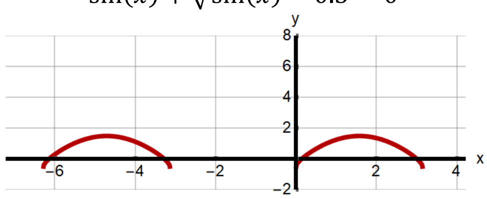


9 $x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16 = 0$

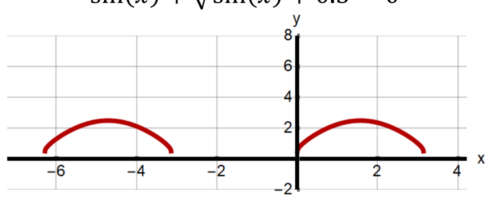


10 $x^2 + \sqrt{x} = 0$

11 $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} - 0.5 = 0$



12 $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} + 0.5 = 0$



Hinweise zur Substitution:

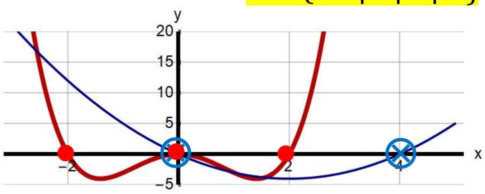
1 $x^4 - 4x^2 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2	**2** $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2
3 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2	**4** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2
5 $x^4 + 2x^2 - 4 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2	**6** $x^6 + 5x^4 + 4x^2 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2
7 $-3x + 2\sqrt{x} + 1 = 0$ Ersetzen Sie $\sqrt{x}$ durch u:= $\sqrt{x}$	**8** $10^x + (10^x)^2 - 0.5 = 0$ Ersetzen Sie 10^x durch u:= 10^x
9 $x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16 = 0$ Ersetzen Sie x^2 durch u:= x^2	**10** $x^2 + \sqrt{x} = 0$ Ersetzen Sie $\sqrt{x}$ durch u:= $\sqrt{x}$
11 $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} - 0.5 = 0$ Ersetzen Sie $\sqrt{\sin(x)}$ durch u:= $\sqrt{\sin(x)}$	**12** $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} + 0.5 = 0$ Ersetzen Sie $\sqrt{\sin(x)}$ durch u:= $\sqrt{\sin(x)}$

Lösungen:

1

Doppelte Nullstelle ↓ ↓

$x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{-2 \mid 0 \mid 0 \mid 2\}$



Lösungsmenge $\mathbb{L}$. Zwei **ein**fache Nullstellen bei **x=−1** und **x=+1**; Eine **zwei**fache Nullstelle bei **x=0**.

● : Nullstellen von f(**x**)

⊗ : Nullstellen von f(**u**)

$x^4 - 4x^2 = 0$ | $x^2 = u \rightarrow x^4 = u^2$ **Substitution**

$u^2 - 4u = 0$ | **u Faktorisieren**

$u(u-4) = 0$ | $\div$ u $\rightarrow$ $u_1 = 0$ ⊗

$u - 4 = 0$

$u = 4$ | $u_2 = 4$ ⊗

$u_1 = x^2 = 0$ | $\pm\sqrt{()}$ **Resubstitution**

$x_{1,2} = \pm 0$ $x_{1,2} = \pm 0$ ●

$u_2 = x^2 = 4$ | $\pm\sqrt{()}$ **Resubstitution**

$x_{3,4} = \pm 2$ $x_3 = -2$ und $x_4 = 2$ ●

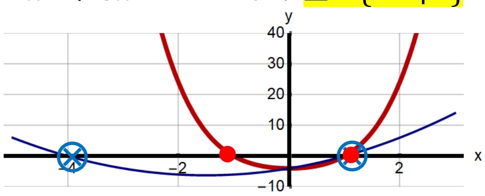
2 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2} \mid \sqrt{2} \mid \sqrt{2}\}$

3

Einfache Nullstellen ↓ ↓

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{-1 \mid 1\}$



$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ | $x^2 = u \rightarrow x^4 = u^2$

$u^2 + 3u - 4 = 0$ **Mitternachtsformel**

Resubstitution: x $= \pm\sqrt{u}$

$u_1 = -4$ u < 0 →

$\rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ **Keine (reelle) Lösung**

$u_2 = 1$ u > 0 →

$\rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ **Zwei (reelle) Lösungen**

4 $x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{\ \}$

↑

Keine (reelle) Nullstelle

5 $x^4 + 2x^2 - 4 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{-1+\sqrt{5}} \mid \sqrt{-1+\sqrt{5}}\}$

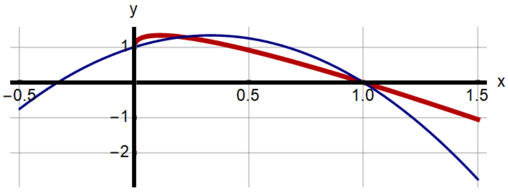
6 $x^6 + 5x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{0 \mid 0 \mid 0\}$

↑ ↑ ↑
Dreifache Nullstelle

---

7 $-3x + 2\sqrt{x} + 1 = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$



Achtung: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{L} = \{1\}$

$-3x + 2\sqrt{x} + 1 = 0$ $\quad \mid \sqrt{x} = u \rightarrow x = u^2$

$-3u^2 + 2u + 1$ **Mitternachtsformel**

$u_1 = -\frac{1}{3}$

$\rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \notin \mathbb{R}$ **Resubstitution:** $x = \pm\sqrt{u}$

$u_2 = 1$

$u < 0 \rightarrow$

Keine (reelle) Lösung

$\rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = 1$ $\quad u > 0 \rightarrow$

Zwei (reelle) Lösungen

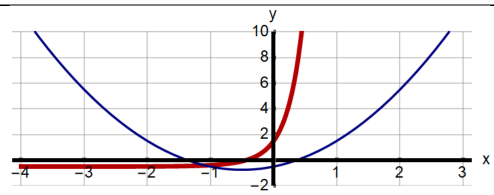
Aber: $x_4 = -1 \notin \mathbb{D}$

Eine einfache Nullstelle bei x=1

---

8 $10^x + (10^x)^2 - 0.5 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{\log_{10}[\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)]\} = \{-0{,}4365\}$



---

9 $x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{-2 \mid -2 \mid -1 \mid -1 \mid 2 \mid 2\}$

10 $x^2 + \sqrt{x} \rightarrow$

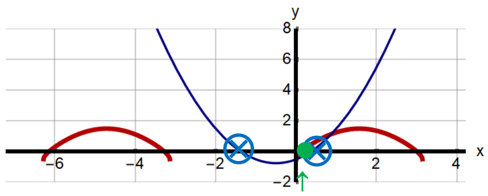
$\mathbb{L} = \{0\}$

↑
Einfache Nullstelle

---

11 $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} - 0.5 = 0 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{0{,}134379\}$



0,134379

$\mathbb{L} = \{\cdots \mid -12.43 \mid -9.56 \mid -6.15 \mid$

$-3.23 \mid 0.13 \mid 3.01 \mid 6.42 \mid$

$9.29 \mid 12.70 \mid 15.57 \mid \cdots\}$

$\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} - 0.5 = 0$ $\quad \mid \sqrt{\sin(x)} = u$

$u^2 + u - 0.5$ **Mitternachtsformel**

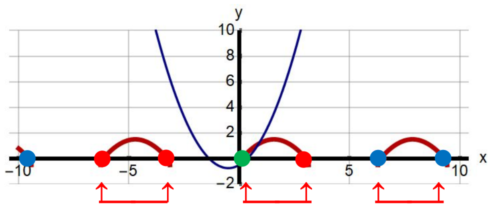
$u_{1,2} = \{\underbrace{-1.36603}_{}, 0.36603\}$ **Lösung für u→**

Fällt weg, da $-1 \leq \sin(u) \leq 1$

Resubstitution→

$x_1 = \sin^{-1}(u)$ **Lösungen für x**

$x_2 = \pi - \sin^{-1}(u)$



Wiederholt sich periodisch

---

12 $\sin(x) + \sqrt{\sin(x)} + 0.5 \rightarrow$

$\mathbb{L} = \{\,\}$