Polynome

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (**I** bis **VII**) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der **hervorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die **Lösungen** zu den Aufgaben. **Fachliche Hilfe** finden Sie auf Seite 3.

I [NULLSTELLEN VON POLYNOMEN – 1] Bestimmen Sie rechnerisch alle Nullstellen der Graphen zu den folgenden Funktionsgleichungen sowie dieVielfachheit dieser Nullstellen:

1.1 $f_1(x) = x^2 + x - 6$

1.2 $f_2(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

1.3 $f_3(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

1.4 $f_4(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$

1.5 $f_5(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1.6 $f_6(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

1.7 $f_7(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

1.8 $f_8(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x$

II [RANDVERHALTEN VON POLYNOMEN] Bestimmen Sie rechnerisch das Randverhalten ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to$ „?“) der Graphen zu den folgenden Funktionsgleichungen:

2.1 $f_1(x) = -2x + 1$

2.2 $f_2(x) = x^2 - 3x + 7$

2.3 $f_3(x) = -\frac{x^4}{1000000} + x^2 + 4x + 7$

2.4 $f_4(x) = (3 - x)(x + 2)(x^2 + 1)$

III [SYMMETRIEVERHALTEN VON GRAPHEN] Geben Sie das Symmetrieverhalten der Graphen zu den folgenden Funktionsgleichungen an und begründen Sie Ihre Angabe:

3.1 $f_1(x) = x^6 - x^4 + 3x - 2$

3.2 $f_2(x) = -x^5 + 3x^3 + 3x$

3.3 $f_3(x) = x^4 - 2x^2 - 9$

3.4 $f_4(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

3.5 $f_5(x)(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)$

3.6 $f_6(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 - 1)$

IV [SYMMETRIE- UND RANDVERHALTEN SOWIE NULLSTELLEN VON GRAPHEN] Ordnen Sie die Funktionsgleichungen *f₁(x)* bis *f₅(x)* den entsprechenden Graphen zu:

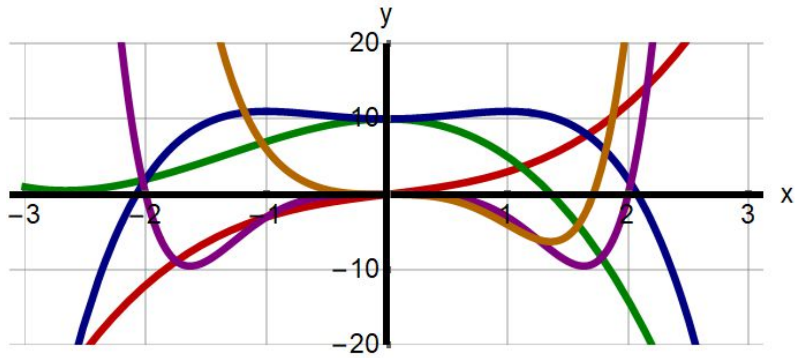
4.1 $f_1(x) = x^3 + 2x$

4.2 $f_2(x) = -x^3 - 4x^2 + 10$

4.3 $f_3(x) = -x^4 + 2x^2 + 10$

4.4 $f_4(x) = x^6 - 4x^4$

4.5 $f_5(x) = x^6 - 5x^3$



V [ZEICHNEN DES GRAPHENS EINES POLYNOMS] Zeichnen Sie die Graphen der Polynome mit den folgenden Funktionsgleichungen mit $-5 \le x \le 5$:

5.1 $f_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + 7$

5.2 $f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-4)(x+3)$

5.3 $f_3(x) = \frac{x^4}{5} - \frac{17x^2}{5} + \frac{16}{5}$

VI [NULLSTELLEN VON POLYNOMEN – 2] Im folgenden x-y-Diagramm sind die Graphen G_{f_1} bis G_{f_5} und die Funktionsgleichungen $f_1(x)$ bis $f_5(x)$ der Funktionen f_1 bis f_5 angegeben. Die Diagramme enthalten alle Nullstellen dieser Funktionen. Bestimmen Sie die Formvariablen (Parameter) und geben Sie die Gleichungen der Funktionen mit eingesetzten Werten an:

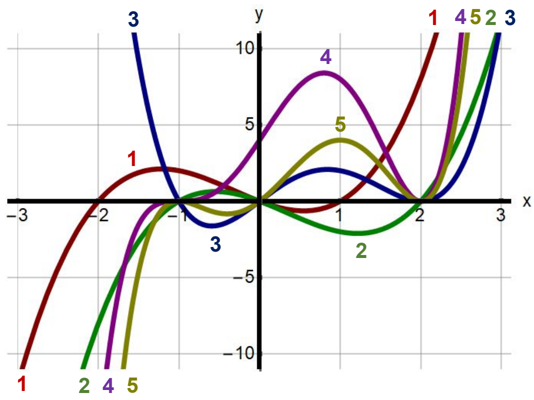
6.1 $f_1(x) = x(x - x_1)(x + x_2)$

6.2 $f_2(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x$

6.3 $f_3(x) = x^4 + b\,x^3 + c\,x$

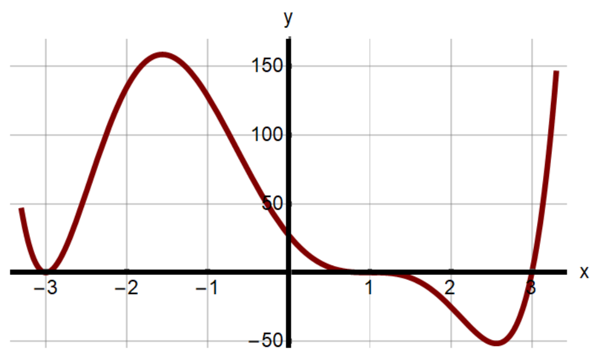
6.4 $f_4(x) = x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + f$

6.5 $f_5(x) = x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + f$

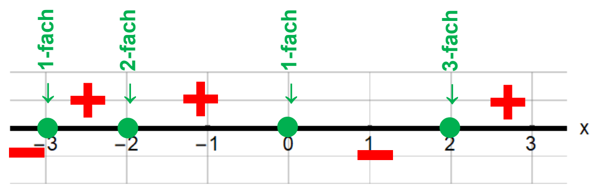


VII [VORZEICHENTABELLE MIT NULLSTELLEN] Bearbeiten Sie die folgenden Teil-Aufgaben:

7.1 Fertigen Sie vom Graphen der Funktion f_1 (rechts) eine Vorzeichentabelle an:



7.2 Erstellen Sie mit Hilfe der Vorzeichentabelle der Funktion f_2 (rechts) eine Skizze des entsprechenden Graphen:



Allgemeine Hinweise zu Polynomen

Was ist ein Polynom ?

Ein Polynom f des Grades n (Ganzrationale Funktion n-ten Grades) besitzt im allgemeinen Fall die Gleichung

$$f_n(x) = \underbrace{a_n}_{\text{Leitkoeffizient}} \overbrace{x^n}^{\text{Exponenten}} + \underbrace{a_{n-1}}_{} \overbrace{x^{n-1}} + \underbrace{a_{n-2}}_{} \overbrace{x^{n-2}} + \cdots + \underbrace{a_1}_{} \overbrace{x^1} + \underbrace{a_0}_{}$$

Exponenten

Leitkoeffizient — Koeffizienten

mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sowie $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Spezielle Polynome

Quadratische Gleichung $\quad$ **n = 2** $\quad f_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ (Hauptform)
$\quad = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Nullstellenform mit Nullstellen x_1 und x_2)

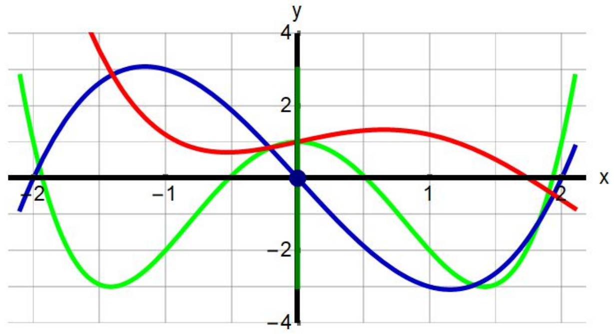
Kubische Gleichung $\quad$ **n = 3** $\quad f_3(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ (Hauptform)
$\quad = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (Nullstellenform mit Nullstellen x_1, x_2 und x_3)

Gerade und ungerade Polynome

Gerade Polynome: Exponenten **gerad**zahlig $(0, 2, 4, \cdots)$
Graph **achsensymmetrisch** zur **y-Achse**

Ungerade Polynome: Exponenten **un**geradzahlig $(1, 3, 5, \cdots)$
Graph **punktsymmetrisch** zum **Koordinatenursprung**

Gemischtzahlige Polynome: Exponenten **gerad- und un**geradzahlig
Keine Symmetrie zum Koordinatenursprung und zur y-Achse



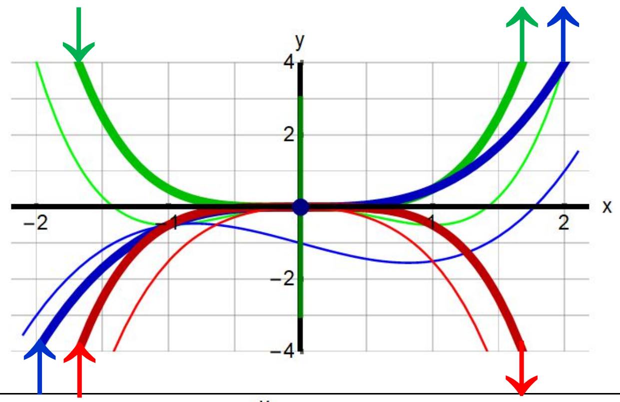
Globalverlauf (→AB 1.05)

Verhalten des Graphen eines Polynoms mit der Gleichung f(x) für x→ ±∞ (Randverhalten). **Beispiele**:

$f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 \;\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \rightarrow +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \rightarrow +\infty$

$f(x) = \frac{x^3}{2} - x - 1 \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \rightarrow -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \rightarrow +\infty$

$f(x) = -\frac{x^4}{2} - x^2 \;\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \rightarrow -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \rightarrow -\infty$



y-Achsenabschnitt

Beispiel:
$f(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)^3 \rightarrow y_0 = f(0) = -2$

Nullstellen (→AB 1.04)

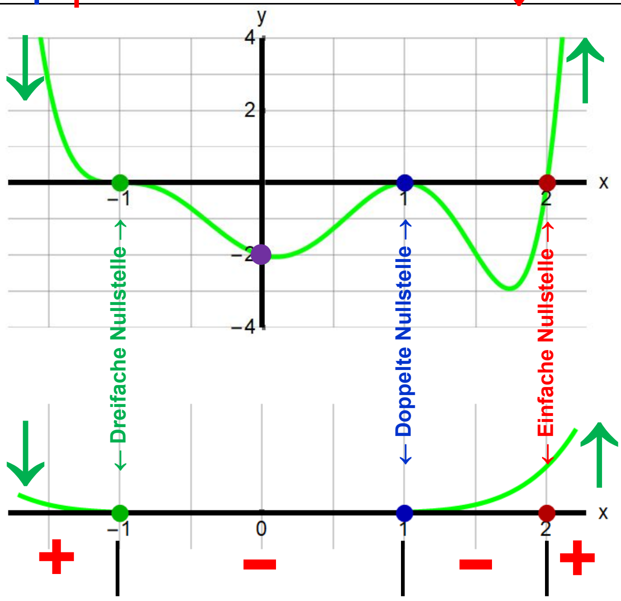
Beispiel:
$f(x) = (x-2)(x-1)^2(x+1)^3 =$
$x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2$

Einfache Nullstelle
Zweifache Nullstelle
Dreifache Nullstelle

Nullstellensuche: Substitution (→AB 1.02)
Polynomdivision (→AB 1.03)

Vorzeichentabelle – 1

Die Vorzeichentabelle zeigt an, ob sich der Graph einer Funktion zwischen zwei benachbarten Nullstellen oberhalb (+) oder unterhalb (−) der x-Achse befindet,



Lösungen

I

1.1 $\mathbb{L}=\{-3,2\}$	**1.2** $\mathbb{L}=\{-4,0,2\}$	**1.3** $\mathbb{L}=\{-3,-1,1,3\}$	Substitution
1.4 $\mathbb{L}=\{-3,0,1,3\}$	x ausklammern Substitution	**1.5** $\mathbb{L}=\{-1,1,3\}$	Eine Nullstelle erraten → Polynomdivision
1.6 $\mathbb{L}=\{-2,-1,0,1,2\}$	x ausklammern Substitution	**1.6** $\mathbb{L}=\{-2,0,1,3\}$	x ausklammern → Nullstelle erraten → Polynomdivision
1.8 $\mathbb{L}=\{-2,-1,0,1,3\}$	x ausklammern → Eine Nullstelle erraten → Polynomdivision → Weitere Nullstelle erraten → Polynomdivision		

Unsicher bei der **Substitution**: Arbeiten Sie das Dokument `1-02-Substitution.pdf` durch
Unsicher bei der **Polynomdivision**: Arbeiten Sie das Dokument `1-03-Polynomdivison.pdf` durch

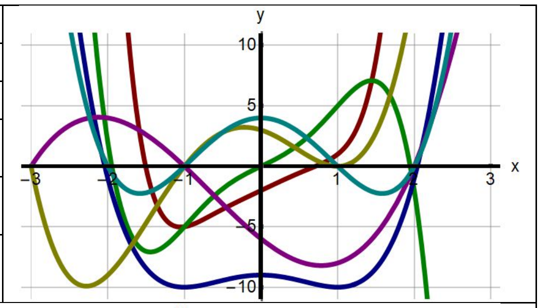
II

2.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) \to +\infty$	**2.2** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) \to +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) \to +\infty$
2.3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) \to -\infty$	**2.4** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) \to -\infty$

Unsicher bei der **Bestimmung des Randverhaltens**: Arbeiten Sie das Dokument `1-05-Polynomdivison.pdf` durch

III

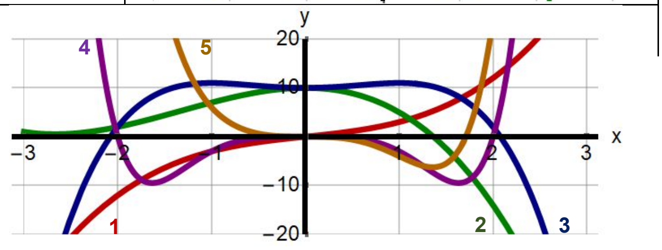
3.1	**Keine Symmetrie**	Gerad- und ungeradzahlige Exponenten
3.2	**Punktsymmetrisch**	Nur ungeradzahlige Exponenten
3.3	**Achsensymmetrisch**	Nur geradzahlige Exponenten
3.4	**Keine Symmetrie**	$f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$: Gerad- und ungeradzahlige Exponenten
3.5	**keine Symmetrie**	$f_5(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$: Gerad- und ungeradzahlige Exponenten
3.6	**Achsensymmetrisch**	$f_6(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: Nur geradzahlige Exponenten



Unsicher bei der **Bestimmung des Symmetrieverhaltens**:
Arbeiten Sie das Dokument `1-06-Symmetrie.pdf` durch

IV

4.1	$f_1(x) = x^3 + 2x$	1
4.2	$f_2(x) = -x^3 - 4x^2 + 10$	2
4.3	$f_3(x) = -x^4 + 2x^2 + 10$	3
4.4	$f_4(x) = x^6 - 4x^4$	4
4.5	$f_5(x) = x^6 - 5x^3$	5

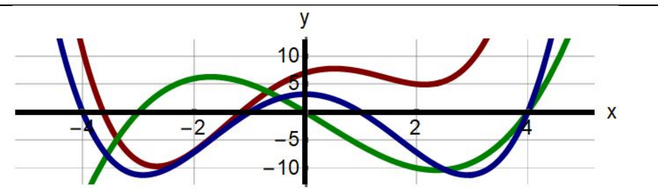


V

5.1 $f_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 3x + 7$

5.2 $f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-4)(x+3)$

5.3 $f_3(x) = \frac{x^4}{5} - \frac{17x^2}{5} + \frac{16}{5}$



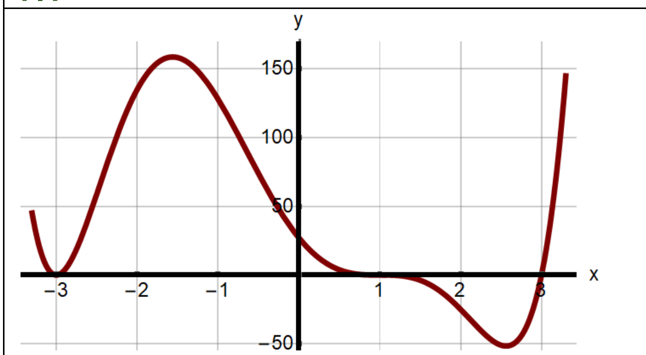
VI

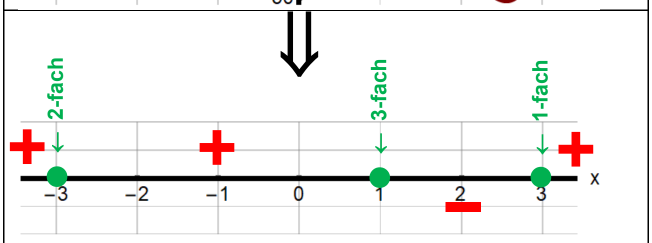
6.1 $f_1(x) = (x-1)x(x+2)$	**6.2** $f_2(x) = x^3 - x^2 - 2x$
6.3 $f_3(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$	**6.4** $f_4(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$
6.5 $f_5(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$	

Unsicher bei der **Bestimmung des Kurvenverlaufes von Graphen bei Nullstellen**:
Arbeiten Sie das Dokument `1-04-Nullstellen.pdf` durch

VII

7.1





7.2