

# 0-12 Lineare Gleichungssysteme

## Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis VII) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der grün hervorgehobenen Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. Rotbraun hervorgehobene Aufgaben sind besonders „sportlich“ und müssen nicht unbedingt bearbeitet werden. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben. Fachliche Hilfe zum Rechnen mit Brüchen finden Sie auf Seite 3.

### I [Lineare Gleichungssysteme ohne Parameter und mit zwei Unbekannten] Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme nach x und y auf:



**01)** I  $1 + x = 2$   
II  $x + y = 3$

**02)** I  $x + y = 2$   
II  $-x + y = -2$

**03)** I  $3x - 2y = -4$   
II  $2x - 3y = 4$

**04)** I  $x + y = 3$   
II  $y - x = 1$

**05)** I  $3 + 4x = 5y$   
II  $4x - 2 = 2y$

**06)** I  $3 + 4x = -x + 5y$   
II  $-2 + 4x = 2x$

**07)** I  $3 + 5x = 5(y - 1)$   
II  $3(-2 + x) = 2y$

**08)** I  $5x + 3x = y - 1$   
II  $3(y - 2) = 2y$

**09)** I  $x^2 + 2y = 3$   
II  $4x^2 + 2y = 6$

Bearbeiten Sie Aufgaben 10 bis 12 mit Methode 4 („Graphische“ Methode)

**10)** I  $3x + 2y = 2$   
II  $-2x + 3y = 6$

**11)** I  $3x + 2y = -5$   
II  $6x + 4y = -30$

**12)** I  $3x - 2y = -10$   
II  $6x - 4y = -20$

### II [Lineare Gleichungssysteme ohne Parameter und mit drei Unbekannten] Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme nach x, y und z auf:



**13)** I  $x = 1$   
II  $x + y = 2$   
III  $x + y + z = 3$

**14)** I  $x + y = 2$   
II  $x + z = 4$   
III  $y + z = 8$

**15)** I  $x + \frac{y}{2} = \frac{2}{3}$   
II  $\frac{x}{4} + 2z = \frac{1}{2}$   
III  $y + \frac{z}{2} = 8$

**16)** I  $3x - 2y + 7z = 2$   
II  $4x - 2y + 2z = 1$   
III  $y + 4z = 2$

**17)** I  $3x + 2y + 2z = 4$   
II  $4x - 2y + 2(-1 + z) = y$   
III  $y + 4z = 2(x + z)$

### III [Lineare Gleichungssysteme mit Parametern und mit zwei Unbekannten] Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme nach x und y auf:



**18)** I  $ax - 3y = 4$   
II  $4x - y = 2$

**19)** I  $ax + 2y = 4$   
II  $4x - by = 2$

**20)** I  $ax - 7y = 4a$   
II  $ax - y = 2$

**21)** I  $ax - by = 4$   
II  $ax + 3by = 2$

**22)** I  $ax - by = c$   
II  $ax + 3by = 2c$

**23)** I  $a_1x + b_1y = c_1$   
II  $a_2x + b_2y = c_2$

### IV [Lineare Gleichungssysteme mit Parametern und mit drei Unbekannten] Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme nach x, y und z auf:



**24)** I  $ax - 2y = 1$   
II  $ax + 2y + 2z = 3$   
III  $ax - by + cz = 2$

**25)** I  $ax + 2y - 3z = 1$   
II  $ax - by + 2z = 3$   
III  $ax - by + cz = 2$

**26)** I  $ax + by + 2z = 4$   
II  $4x - by + cz = 2$   
III  $ax - 2y + cz = 2$

A

**V** [Lineare Gleichungssysteme mit vier oder mehr Unbekannten] **Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme nach u, v, w, x, y und z auf.**



**25)** I  $2u = 1$   
 II  $2u + 2v = 2$   
 III  $2u + 2v - 3w = 3$   
 IV  $2u + 2v - 3w - 7x = 4$

**26)** I  $2u = 1$   
 II  $u + 3v = 32$   
 III  $2u + 2v - 3w - 5x = 3$   
 IV  $2u + 2v + 3w - 7x = 4$

**27)** I  $2u = 1$   
 II  $2u - 3v = 2$   
 III  $2v - 3w = 3$   
 IV  $3w - 7x = 4$   
 V  $4x + 2y = 4$

**28)** I  $2u = 1$   
 II  $3u - 3v = 2$   
 III  $3u - 4v + w = -2$   
 IV  $3u + 2v - w + 4x = 2$   
 V  $u + 2v - 3w + 2x - y = -4$   
 VI  $2u - 2v - 2w + 2x + 2y - z = -4$

**VI** [Steckbriefaufgaben für Geraden und Parabeln] **Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zu den im Folgenden beschriebenen Graphen mit Hilfe linearer Gleichungssysteme:**



**29)** Der Graph einer linearen Funktion  $f$  verläuft durch die Punkte  $P(3|3)$  und  $Q(6|2)$ . Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Geradengleichung  $f(x)$ .

**30)** Der Graph einer quadratischen Funktion  $g$  verläuft durch die Punkte  $P(-2|3)$ ,  $Q(1|7)$  und  $S(5|-1)$ . Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Parabelgleichung  $g(x)$ .

**31)** Der Graph einer quadratischen Funktion  $h$  verläuft durch den Punkt  $P(1|5)$  und den Scheitelpunkt  $S(7|3)$ . Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Parabelgleichung  $h(x)$ .

**VII** [Textaufgaben] **Lösen Sie folgende Textaufgaben. Erstellen Sie dazu die entsprechenden linearen Gleichungssysteme und lösen Sie diese:**



**32)** Hans züchtet Hasen und Hühner. Als er die Köpfe zählt, kommt er auf die Anzahl von 8. Als er die Pfoten und Füße zählt, kommt er auf die Anzahl von 28. Berechnen Sie, wieviele Hasen und wieviele Hühner Hans besitzt.

**33)** Uschi ist heute 21 Jahre älter als ihr Sohn. In 6 Jahren wird er ein Fünftel des Alters seiner Mutter erreicht haben. Wo ist gerade der Vater?

**34)** Jane kauft 10 Brötchen, 2 Croissants und 3 Stück Kuchen. Für alles zusammen zahlt sie 11 Euro. Otto kauft 5 Brötchen, 4 Croissants und 2 Kuchen für einen Gesamtbetrag von 9,50 Euro. Hans kauft 1 Brötchen, 2 Croissants und 3 Kuchen. Dafür muss er 8 Euro und 30 Eurocent zahlen. Berechnen Sie die Einzelpreise für ein Brötchen, ein Croissant und einen Kuchen.

**35)** Die fehlenden Zahlen in den Felder des rechts abgebildeten Quadrates müssen so berechnet werden, dass sich für alle Zeilen und Spalten jeweils die Summe 68 ergibt.

8	30		2
	12		
18	20		5
		14	26

Abbildung zu Aufgabe 35

# Hinweise

## Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

Allgemeines LGS

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ & b_2 y + c_2 z = d_2 \\ & c_3 z = d_3 \end{aligned}$$

Dreieckiges LGS

$$\begin{aligned} a_1 x &= d_1 \\ & b_2 y = d_2 \\ & c_3 z = d_3 \end{aligned}$$

Diagonales LGS

$x, y, z$ : unbekannte **Variable**  
 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ : **Koeffizienten**

## Lösen linearer Gleichungssysteme – Methoden

### Methode 1 – Einsetzungsmethode

$$\begin{aligned} x + 3y &= 11 & (I) \\ 4x - 2y &= 2 & (II) \\ x &= 11 - 3y & (I') \quad \text{in (II)} \\ 4(11 - 3y) - 2y &= 2 & (II') \\ 44 - 14y &= 2 \\ 14y &= 42 \\ y &= 3 & \text{in (I)} \\ x + 3 \cdot 3 &= 11 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$x$  aus (I) ausrechnen und in (II) einsetzen  $\rightarrow$  (II')  
 (II') nach  $y$  auflösen  $\rightarrow$  Lösung für  $y$   
 $y = 3$  in (I) einsetzen  $\rightarrow$   $x = 2$

Eine der beiden Gleichungen (hier: I) wird nach einer Variablen  $x$  aufgelöst. Die Lösung wird in die andere Gleichung (hier: II) eingesetzt  $\rightarrow$  Auflösung von (II) nach  $y$   $\rightarrow$  **Lösung für  $y$**   
 Die Lösung für  $y$  wird in (I)  $\rightarrow$  **Lösung für  $x$**

### Methode 2 – Additionsmethode

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 22 & (I) \\ 4x - 3y &= 10 & (II) \\ \bullet (4x + 3y) - (4x - 3y) &= 22 - 10 \\ 6y &= 12 \\ y &= 2 & (I) + (II) \\ \bullet (4x + 3y) + (4x - 3y) &= 22 + 10 \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Hier  $\bullet$  bietet sich die **Additionsmethode** an, da die Koeffizienten von  $x$  in beiden Gleichungen gleich groß (4) sind.  
 Hier  $\bullet$  bietet sich die **Subtraktionsmethode** an, da die Koeffizienten von  $y$  in beiden Gleichungen bis auf das **Vorzeichen** gleich groß ( $\pm 3$ ) sind.

Beide Gleichungen besitzen für die gleiche Variable ( $x$  oder  $y$ ) **betragsgleiche** Koeffizienten. Beide Gleichungen werden voneinander **subtrahiert** (Koeffizienten mit **gleichen** Vorzeichen) oder aufeinander **addiert** (Koeffizienten mit **ungleichen** Vorzeichen).

### Methode 3 – Gleichsetzungsmethode

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 18 & (I) \\ 2x + 3y &= 22 & (II) \rightarrow \\ 2x + 2y &= 22 - y & (II') \\ 18 &= 22 - y & (III) \quad (I)=(II') \\ y &= 4 & \text{in (I)} \\ 2x + 8 &= 18 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

	Linke Seite	Rechte Seite
(I)	$2x + 2y$	$18$
(II)	$2x + 3y$	$22$
(II')	$2x + 2y$	$22 - y$
$\rightarrow$ (III)	$18$	$22 - y$
Nur $y$ als Variable $\uparrow$		
$\rightarrow$	$y = 4$	
$\rightarrow$	$x = 5$	

Eine der Gleichungen (oder beide) so umformen, dass beide Gleichungen links den gleichen Term besitzen und in beiden Gleichungen rechts nur eine Variable ( $x$  oder  $y$ ) auftritt. Durch Gleichsetzen der Gleichungen erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

### Methode 4 – „Graphische“ Methode

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 18 & (I) \\ 2x + 3y &= 12 & (II) \\ f_1(x) &= y = x + 9 & (I') \\ f_2(x) &= y = -\frac{2x}{3} + 4 & (II') \\ f_1(x) &= f_2(x) \\ 9 + x &= -\frac{2x}{3} + 4 \\ x &= -3 & S(-3|6) \\ y &= 6 & \text{Schnittpunkt} \end{aligned}$$

$f_1(x)$  und  $f_2(x)$  in  $x$ - $y$ -Diagramm darstellen  $\rightarrow$  **Schnittpunkt S**  
 Abb  $\rightarrow$

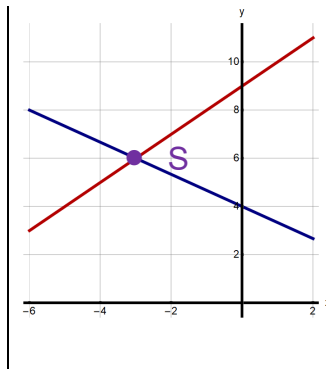


Abb.  $\rightarrow$   $G_{f_1} \parallel G_{f_2}$ : **keine Lösung**  
 $\leftarrow$  Abb.  $G_{f_1}$  und  $G_{f_2}$  haben einen Schnittpunkt: **Eine Lösung**  
 Abb.  $\rightarrow$   $G_{f_1} = G_{f_2}$ : **Unendlich viele Lösungen**

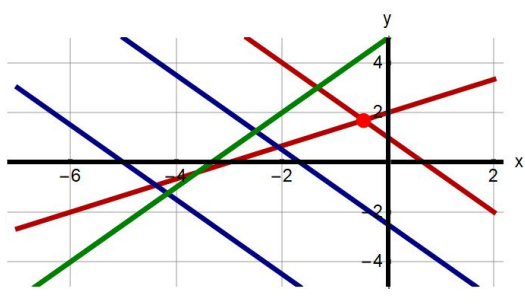
# Lösungen

<b>1)</b> $x = 1 \mid y = 2$	<b>02)</b> $x = 2 \mid y = 0$	<b>03)</b> $x = -4 \mid y = -4$
<b>04)</b> $x = 1 \mid y \rightarrow 2$	<b>05)</b> $x = \frac{4}{3} \mid y \rightarrow \frac{5}{3}$	<b>06)</b> $x = 1 \mid y = \frac{8}{5}$
<b>07)</b> $x = \frac{46}{5} \mid y = \frac{54}{5}$	<b>08)</b> $x = \frac{5}{8} \mid y = 6$	<b>09)</b> $x_1 = -1 \mid y_1 = 1$ $x_2 = 1 \mid y_2 = 1$

**10)** I  $f_I(x) = 1 - \frac{3x}{2}$   
II  $f_{II}(x) = 2 + \frac{2x}{3}$

**11)** I  $g_I(x) = -\frac{5}{2} - \frac{3x}{2}$   
II  $g_{II}(x) = -\frac{15}{2} - \frac{3x}{2}$

**12)** I  $h_I(x) = 5 + \frac{3x}{2}$   
II  $h_{II}(x) = 5 + \frac{3x}{2}$



$x = -\frac{6}{13} \mid y = \frac{22}{13}$   
 $x, y \in \{ \}$   
 $G_{g_I} \parallel G_{g_{II}} \rightarrow$   
keine gemeinsamen Punkte  
 $x, \in \{ \} \mid y = 5 + \frac{3x}{2}$   
 $G_{h_I} = G_{h_{II}} \rightarrow$  unendlich  
viele gemeinsamen Punkte

<b>13)</b> $x = 1 \mid y = 1 \mid z = 1$	<b>14)</b> $x = -1 \mid y = 3 \mid z = 5$	<b>15)</b> $x = -\frac{314}{99} \mid y = \frac{760}{99} \mid z = \frac{64}{99}$
<b>16)</b> $x = \frac{1}{2} \mid y = \frac{4}{5} \mid z = \frac{3}{10}$	<b>17)</b> $x = \frac{9}{13} \mid y = \frac{7}{13} \mid z = \frac{11}{26}$	

<b>18)</b> $x = -\frac{2}{-12+a}$ $y = -\frac{2(-8+a)}{-12+a}$	<b>19)</b> $x = \frac{4(1+b)}{8+ab}$ $y = -\frac{2(-8+a)}{8+ab}$	<b>20)</b> $x = -\frac{-7+2a}{3a}$ $y = \frac{1}{3}(1-2a)$
---	---	---

<b>21)</b> $x = \frac{7}{2a}$ $y = -\frac{1}{2b}$	<b>22)</b> $x = \frac{5c}{4a}$ $y = \frac{c}{4b}$	<b>23)</b> $x = -\frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$ $y = -\frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$
--	--	--

<b>24)</b> $x = -\frac{4-b-4c}{a(-2+b+2c)}$ $y = -\frac{1-c}{-2+b+2c}$ $z = \frac{b}{-2+b+2c}$	<b>25)</b> $x = -\frac{8+5b-6c-bc}{a(2+b)(-2+c)}$ $y = -\frac{1+2c}{(2+b)(-2+c)}$ $z = -\frac{1}{-2+c}$	<b>26)</b> $x = -\frac{2(2-b-2c+bc)}{-8+ab+ac-2bc}$ $y = -\frac{2(4-a-4c+ac)}{8-ab-ac+2bc}$ $z = -\frac{2(-8+a-2b+ab)}{8-ab-ac+2bc}$
--	---	--

<b>25)</b> $u = \frac{1}{2} \quad v = \frac{1}{2} \quad w = -\frac{1}{3} \quad x = -\frac{1}{7}$	<b>26)</b> $u = \frac{1}{2} \quad v = \frac{21}{2} \quad w = \frac{43}{36} \quad x = \frac{37}{12}$
<b>27)</b> $u = \frac{1}{2} \quad v = -\frac{1}{3} \quad w = -\frac{11}{9}$ $x = -\frac{23}{21} \quad y = \frac{88}{21}$	<b>28)</b> $u = \frac{1}{2} \quad v = -\frac{1}{6} \quad w = -\frac{25}{6}$ $x = -\frac{5}{6} \quad y = 15 \quad z = 42$

<b>29)</b> $f(x) = m x + t$	$f(3) = 3 \rightarrow 3m + t = 3$ $f(6) = 2 \rightarrow 6m + t = 2$	$m \rightarrow -\frac{1}{3} \quad t \rightarrow 4$ $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$
<b>30)</b> $g(x) = a x^2 + b x + c$	$g(-2) = 34 \rightarrow a - 2b + c = 3$ $g(1) = 7 \rightarrow a + b + c = 7$ $g(5) = -1 \rightarrow 25a + 5b + c = -1$	$a = -\frac{10}{21} \quad b = \frac{6}{7} \quad c = \frac{139}{21}$ $g(x) = -\frac{10}{21}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{139}{21}$
<b>31)</b> $h(x) = a x^2 + b x + c$	$h(1) = 5 \rightarrow a + b + c = 5$ $h(7) = 3 \rightarrow 49a + 7b + c = 3$ $-\frac{b}{2a} = 7 \rightarrow 14a + b = 0$	$a = \frac{1}{18} \quad b = -\frac{7}{9} \quad c = \frac{103}{18}$ $h(x) = \frac{x^2}{18} - \frac{7x}{9} + \frac{103}{18}$

**VI 32)** 6 Hasen und 2 Hühner

**33)** Der Sohn ist  $-\frac{3}{4}$  Jahre = -9 Monate alt. Wo ist jetzt wohl der Vater?

**34)** Brötchen: 0,30 €  
Croissant: 1,00 €  
Kuchen: 2,00 €

**35)**

8	30	$c_1$	2
$a_2$	12	$c_2$	$d_2$
18	20	$c_3$	5
$a_4$	$b_4$	14	26

$8 + 30 + c_1 + 2 = 68$   
 $a_2 + 12 + c_2 + d_2 = 68$   
 $18 + 20 + c_3 + 5 = 68$   
 $a_4 + b_4 + 14 + 26 = 68$   
 $8 + a_2 + 18 + a_4 = 68$   
 $30 + 12 + 20 + b_4 = 68$   
 $(c_1 + c_2 + c_3 + 14 = 68)$   
 $2 + d_2 + 5 + 26 = 68$

Nur 7 Gleichungen nötig

8	30	28	2
20	12	1	35
18	20	25	5
22	6	14	26

