

0-08

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis XII) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der **herorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben. Fachliche Hilfe zum Rechnen mit quadratischen Gleichungen und Funktionen finden Sie auf Seite 3.

I [Binomische Formeln - 1] Lösen Sie folgende Klammerterme mit Hilfe der binomischen Formeln vollständig auf.



01) $(a - b)^2$

02) $(a + b)^2$

03) $(a - b)(a + b)$

04) $(a + b)(2a - 2b)$

05) $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

06) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

II [Binomische Formeln - 2] Wandeln Sie folgende Terme mit Hilfe der binomischen Formeln in ein Produkt mit zwei Klammertermen um.



07) $x^2 + 2xy + y^2$

08) $x^4 + 2x^2y + y^2$

09) $u - v$

10) $a^3 - b^2$

11) $a - b^4$

12) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

III [Binomische Formeln - 3] Kürzen Sie folgende Brüche mit Hilfe der binomischen Formeln:



13) $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$

14) $\frac{a^5 - ab^2}{a^3 - ab}$

15) $\frac{a - b^2}{\sqrt{a} - b}$

IV [Quadratische Gleichungen - 1] Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf ($x, b, c \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).



16) $x^2 - x - 6 = 0$

17) $x^2 - 4 = 0$

18) $x^2 + 4 = 0$

19) $2x^2 + 4x + 12 = 0$

20) $(x - a)(3x - 2b) = 0$

21) $2b^2 - 5bx + 3x^2 = 0$

22) $ax^2 + bx - c = 0$

23) $2ax^2 - bx + 4c = 0$

24) $2ax^4 - bx^2 + 4c = 0$

V [Berechnung des Scheitelpunktes] Berechnen Sie den Scheitelpunkt S der Graphen zu folgenden Funktionsgleichungen ($x, b, c \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).



25) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

26) $f(x) = ax^2 + 8x - 2$

27) $f(x) = -2x^2 + bx - 5$

28) $f(x) = -2x^2 + 2x - 2c$

29) $f(x) = -ax^2 - bx - 2c$

30) $f(x) = (x + 3)(2x - 6)$

VI [Diskriminante - 1] Berechnen Sie die Diskriminante D der folgenden Gleichungen und geben Sie an, wieviele Nullstellen die Graphen der Funktionen besitzen ($x, b, c \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).



31) $2x^2 + 3x - 4 = 0$

32) $7x^2 + 28x + 28 = 0$

33) $7x^2 + 3x + 21 = 0$

VII [Diskriminante - 2] Berechnen Sie, bei welchen Werten für a , b und c die Graphen der folgenden Funktionsgleichungen eine Nullstelle enthalten ($x, b, c \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).



34) $ax^2 + 12x + 6$

35) $bx + 5x^2 + 20$

36) $-5x^2 + 10x + c$

37) $ax^2 - 3ax + 1$

38) $ax^2 + a + 6x$

39) $ax^2 - 6ax + 2a$

VIII [Quadratische Ungleichungen] Lösen Sie folgende Ungleichungen nach x auf ($x \in \mathbb{R}$).



40) $x^2 + 3x - 10 < 0$

41) $x^2 + 5x + 6 \leq 2$

42) $x^2 + \frac{7x}{6} + \frac{1}{3} > -1$

IX [Steckbriefaufgaben] Ermitteln Sie durch Berechnung die Gleichungen der quadratischen Funktionen f_1 und f_2 mit den folgenden Eigenschaften ($x \in \mathbb{R}$).



43) Der Graph der Funktion f_1 besitzt den Ordinatenabschnitt 2 und verläuft durch die Punkte $P_1(-1|3)$ und $P_2(2|1)$.

44) Der Graph der Funktion f_2 besitzt den Ordinatenabschnitt -4 und verläuft durch den Scheitelpunkt $S(-2|8)$.

X [Schnittpunkte von Kurven] Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte der Graphen folgender Funktionen x ($x \in \mathbb{R}$).



45) $f(x) = x^2 + 4x - 2$
 $g(x) = 2x + 1$

46) $f(x) = x^2 - 4x - 2$
 $g(x) = -2x - 3$

47) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
 $g(x) = 2x - 8$

48) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
 $g(x) = 2x^2 + 4x + 6$

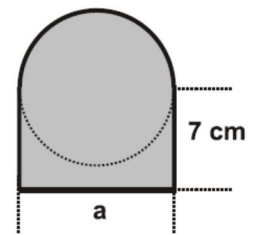
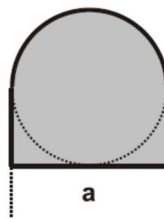
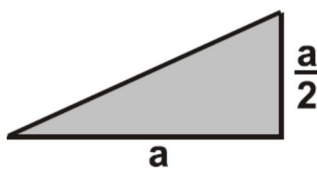
49) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$
 $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$

50) $f(x) = 3x^2 - 12x + 12$
 $g(x) = -2x^2 + 8x - 18$

XI [Geometrie] Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zur Geometrie ($a, b, c \in \mathbb{R}$).



51) Ein Rechteck besitzt einen Umfang von $U = 18$ und eine Fläche von $A = 20$. Berechnen Sie die Seitenlängen a und b des Rechteckes.



52) Ein rechtwinkeliges Dreieck besitzt die Seitenlängen a und $\frac{a}{2}$ (Abbildung oben, links). Geben Sie als allgemeine Gleichung die Fläche A in Abhängigkeit von a an.

53) Die oben in der Mitte dargestellte Figur besitzt eine Fläche von 10. Berechnen Sie die Seitenlänge a .

54) Die oben rechts dargestellte Figur besitzt eine Fläche von 10 cm^2 . Berechnen Sie die Seitenlänge a in cm.

XII [Sachaufgaben] Bearbeiten Sie folgende Aufgabe.



55) Auto 1 startet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ortspunkt $x_{01} = 100 \text{ m}$ und fährt mit konstanter Beschleunigung a entlang einer geraden Straße. Auto 2 befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Ortspunkt $x_{02} = 0$ und fährt mit konstanter Geschwindigkeit in die gleiche Richtung wie Auto 1. Die Ortsgleichungen beider Autos sind $x_1(t) = 100 \text{ m} + \frac{1}{2} a t^2$ und $x_2(t) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t$. Berechnen Sie, mit welcher Beschleunigung a Auto 1 fahren muss, damit es von Auto 2 eingeholt, aber nicht überholt wird.

Hinweise

Quadratische Gleichungen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hauptform

$x \in \mathbb{R}$ Unabhängige Variable
 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Leitkoeffizient
 $b, c \in \mathbb{R}$ **Koeffizienten**

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Scheitelform

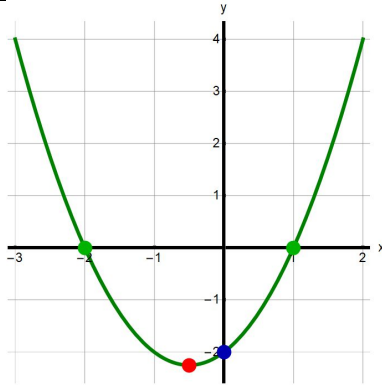
$x \in \mathbb{R}$ Unabhängige Variable
 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Leitkoeffizient
 $S(x_S | y_S)$: **Scheitelpunkt** der Parabel

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nullstellenform

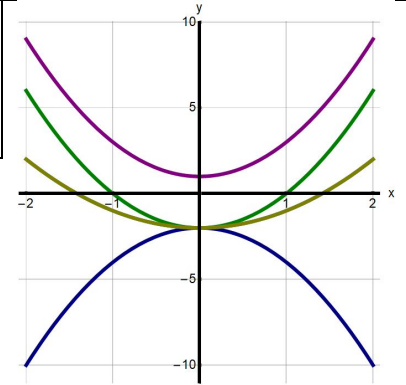
$x \in \mathbb{R}$ Unabhängige Variable
 $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Leitkoeffizient
 $x_{1/2}$: **Nullstellen** der Parabel

Eigenschaften des Graphen



- ← **Nullstellen** x_1, x_2
- ← **Scheitelpunkt** S
- ← **Ordinaten-Abschnitt** y_0

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^2 - 2 \rightarrow \\ f_2(x) &= -2x^2 - 2 \rightarrow \\ f_3(x) &= 2x^2 + 1 \rightarrow \\ f_4(x) &= x^2 - 2 \rightarrow \end{aligned}$$



Lösen quadratischer Gleichungen

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante

Anzahl der Nullstellen

$$b^2 - 4ac > 0 \rightarrow \text{Zwei einfache Nullstellen}$$

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow \text{Eine zweifache Nullstelle}$$

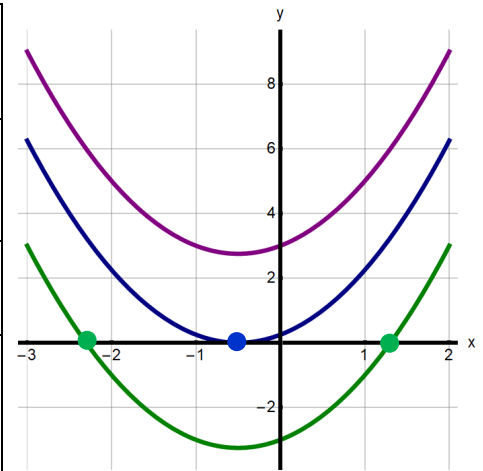
$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \text{Keine Nullstelle}$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-b}{2a} \quad \text{Scheitelstelle}$$

$$\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Abstand zwischen Scheitelstelle und Nullstellen}$$



Ordinatenabschnitt y_0

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_0 = c$$

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

$$y_0 = f(0) \rightarrow$$

$$y_0 = a x_1 x_2$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y_0 = a x_S^2 + y_S$$

Graphische Auswertung von Parabeln

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_0 = -6 \rightarrow c = -6$$

Zur rechnerischen Ermittlung quadratischer Funktionsgleichungen siehe Aufgabenblock IX und Arbeitsblatt 0-10-Steckbrief.pdf

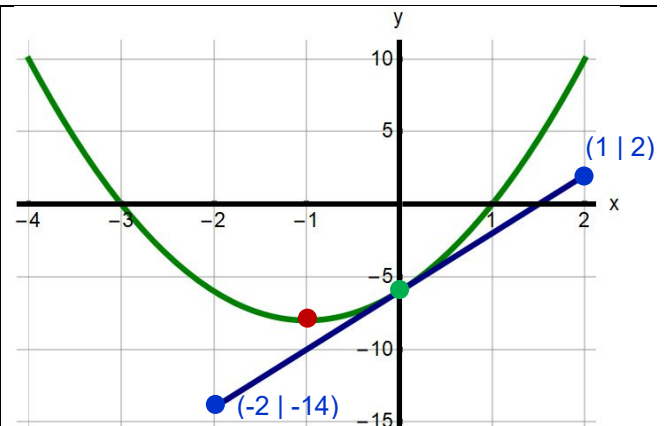
Tangentensteigung bei

$$y_0 = \frac{(2) - (-14)}{(2) - (-2)} = \frac{16}{4} = 4 \rightarrow b = 4$$

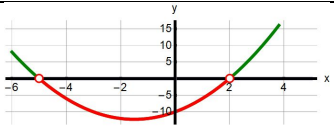
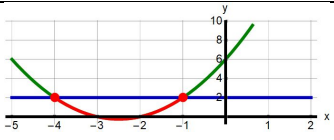
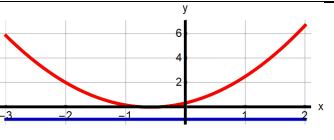
Scheitelpunkt bei

$$x_S = \frac{-b}{2a} \rightarrow a = \frac{-b}{2x_S} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$



Lösungen

I	01) $a^2 - 2ab + b^2$	02) $a^2 + 2ab + b^2$	03) $a^2 - b^2$
	04) $2a^2 - 2b^2$	05) $a - b^2$	06) $a - b$
II	07) $(x + y)^2$	08) $(x^2 + y)^2$	09) $(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v})$
	10) $(\sqrt{a} a + b)(\sqrt{a} a - b)$	11) $(\sqrt{a} - b^2)(\sqrt{a} + b^2)$	12) $(a + b - c)(a + b + c)$
III	13) $a + b$	14) $a^2 + b$	15) $\sqrt{a} + b$
IV	16) $L = \{-2 3\}$	17) $L = \{-2 2\}$	18) $L = \{\}$
	19) $L = \{\}$	20) $L = \{a \frac{2b}{3}\}$	21) $L = \{\frac{2b}{3} b\}$
	22) $L = \{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}\}$	23) $L = \{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 32ac}}{4a}\}$	24) $L = \{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 32ac}}{a}}\}$ Substitution! 4 Lösungen!
V	25) $S(-\frac{3}{4} -\frac{41}{8})$	26) $S(-\frac{4}{a} -2 - \frac{16}{a})$	27) $S(\frac{b}{4} -5 + \frac{b^2}{8})$
	28) $S(\frac{1}{2} \frac{1}{2} - 2c)$	29) $S(-\frac{b}{2a} \frac{b^2}{4a} - 2c)$	30) $S(0 -18)$
VI	31) $D = 41 > 0 \rightarrow 2 \text{ Nst.}$	32) $D = 0 \rightarrow 1 \text{ Nst.}$	33) $D = -579 \rightarrow 0 \text{ Nst.}$
VII	34) $D = 144 - 24a \rightarrow a = 6$	35) $D = -400 + b^2 \rightarrow b = \pm 20$	36) $D = 100 + 20c \rightarrow c = -5$
	37) $D = -4a + 9a^2 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = \frac{4}{9}$	38) $D = 36 - 4a^2 \rightarrow a \rightarrow \pm 3$	39) $D = 28a^2 \rightarrow a = 0$
VIII	40)  $x \in]-5 2[$	41)  $x \in [-4 -1]$	42)  $x \in \mathbb{R}$
	IX	43) $f(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + 3$	44) $f(x) = -3x^2 + 12x - 4$
X	45) $S_1(-3 -5), S_2(1 3)$ Zwei Schnittpunkte	46) $S_{1,2}(1 -5)$ Ein Berührungspunkt	47) Keine gemeinsamen Punkte
	48) $S_1(-0,472,4,557), S_2(8,472 183,443)$ Zwei Schnittpunkte	49) $S_{1,2}(1 0)$ Ein Berührungspunkt	50) Keine gemeinsamen Punkte
XI	51) $a = 4 \text{ und } b = 5 \text{ oder } a = 5 \text{ und } b = 4$	52) $A = \frac{a^2}{2}$	-19,1548 cm (nicht sinnvoll)
	53) $a = 4 \sqrt{\frac{5}{4+\pi}} = 3,34694$	54) $a = \frac{4(-7 \pm \sqrt{49+5\pi})}{\pi} =$	1,32942 cm (sinnvoll)
XII	55) $a = 2,0 \frac{m}{s^2}$		